DS n°3, mathématique

Durée : 3 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation. L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 page recto/verso, et est constitué de trois exercices indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Coefficients binomiaux *(5 points)*

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.
On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}$, où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial k parmi n.

Le but de l'exercice est de montrer que : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Vérification pour $n = 4$
   (a) On a représenté ci-contre les premières lignes du triangle de Pascal :
   Compléter ce triangle avec les deux lignes suivantes.

1		
1	1	
1	2	1

   (b) Écrire en extension S_4, puis la calculer.
   (c) Calculer $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ puis conclure.
2. Une somme auxiliaire : Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose : $T_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k-1}$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \geqslant 1,\ T_n = -\frac{1}{n+1}$.
3. Calcul de S_n
   (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ S_{n+1} - S_n = -T_n$.
   Indication : on pensera à utiliser la formule de Pascal.
   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 2 : Relation entre des sommes *(7 points)*

Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ des réels.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $b_n = n(a_n - a_{n+1})$. On pose également : $\forall n \geqslant 1,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.
Enfin, pour des entiers p, q tels que $1 \leqslant p < q$, on pose $S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q-1} \frac{B_n}{n(n+1)}$.
Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2 \text{ tels que } 1 \leqslant p < q, \text{ on a : } S_{p,q} = \frac{A_p}{p} - \frac{A_q}{q}$$

1. Une vérification. Dans cette question seulement, on pose : $\forall n \geqslant 1,\ a_n = n^2$.
   (a) Déterminer alors l'expression de b_n pour $n \geqslant 1$.
   (b) En déduire les expressions de A_n et de B_n en fonction de $n \geqslant 1$.
   (c) Soient p, q tels que $1 \leqslant p < q$. Montrer que : $S_{p,q} = \frac{p^2 - q^2}{3} + \frac{p-q}{2}$.
   (d) Calculer $\frac{A_p}{p} - \frac{A_q}{q}$, puis conclure.
2. Informatique
   Soit $N \in \mathbf{N}^\star$. Les réels $a_1, a_2, \cdots, a_N$ sont enregistrés dans une liste L de longueur $N+1$:
   $$L = [0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots, a_N]$$
   (a) Pour $n \in [\![1, N]\!]$, que renvoie la commande `>>> L[n]` ?
   (b) Écrire une fonction `b(n,L)` d'arguments $n \in [\![1, N-1]\!]$ et L, qui renvoie la valeur de b_n.

(c) Écrire une fonction `A(n,L)` d'arguments $n \in [\![1, N]\!]$ et L, qui renvoie la valeur de A_n.

(d) On suppose que la fonction `B(n,L)` renvoie la valeur de B_n.
En déduire une fonction `S(p,q,L)` d'arguments des entiers p, q tels que $1 \leqslant p < q \leqslant N$ et L, qui renvoie la valeur de $S_{p,q}$.

(e) Écrire une fonction `differences(q,L)` qui, pour un entier $q \in [\![2, N]\!]$, renvoie la liste des différences $S_{p,q} - \left(\dfrac{A_p}{p} - \dfrac{A_q}{q}\right)$ pour $1 \leqslant p < q$.

3. Résultat général

(a) En utilisant l'égalité : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, montrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2 \text{ tels que } 1 \leqslant p < q, \text{ on a : } S_{p,q} = \frac{B_p}{p} - \frac{B_q}{q} + \sum_{n=p+1}^{q} \frac{b_n}{n}$$

(b) Montrer que : $\forall p, q$ tels que $1 \leqslant p < q$, on a : $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} \frac{b_n}{n} = a_{p+1} - a_{q+1}$.

(c) Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ B_n = A_n - n a_{n+1}$.

(d) Conclure.

Exercice 3 : Étude d'une fonction de la variable complexe *(8 points)*

On considère la fonction $\varphi : z \longmapsto \dfrac{z^2}{z-1}$, où z désigne un nombre complexe.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\varphi$ de la fonction φ.
2. En langage *Python*, on modélise un nombre complexe $z = a + ib$ écrit sous forme algébrique par la liste `[a,b]` de longueur 2.

   (a) Écrire une fonction `somme` d'arguments deux listes `z1,z2` et renvoyant la liste représentant le complexe $z_1 + z_2$.

   (b) Même question pour le produit de deux complexes `z1,z2`.

   (c) On suppose qu'on dispose également d'une fonction `inverse` qui renvoie la liste représentant l'inverse d'un complexe non nul. À l'aide des fonctions précédentes, écrire une fonction `phi` renvoyant l'image par φ d'un complexe $z \in \mathcal{D}_\varphi$.
3. Calculer l'image par φ du nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.
   On donnera la forme algébrique, ainsi que la forme exponentielle du résultat.
4. Résoudre dans $\mathcal{D}_\varphi$ l'équation : $\varphi(z) = 2$.
5. Soit z un nombre complexe de module 1. On écrit alors : $z = e^{i\alpha}$, pour un certain réel $\alpha \in \mathbf{R}$.

   (a) Montrer que $z \in \mathcal{D}_\varphi \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ à 2π près.

   (b) Montrer que : $e^{i\alpha} - 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$.

   (c) En déduire la forme exponentielle de $\varphi(z)$.
6. Soit $\theta \in \mathbf{R}$, on pose $z = 1 + e^{i\theta}$.
   Montrer qu'alors $\varphi(z)$ est un réel, et donner son expression en fonction de θ.
7. On cherche tous les nombres complexes z qui ont une image réelle par la fonction φ.
   Soit $z \in \mathcal{D}_\varphi$ un complexe. On utilise dans les questions suivantes la forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$, ou la forme algébrique : $z = a + ib$.

   (a) Montrer que $\varphi(z) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z^2(\overline{z} - 1) = (\overline{z})^2(z-1)$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

   (b) Montrer qu'alors : $z(r^2 - z) = \overline{z}(r^2 - \overline{z})$.

   (c) En déduire que : $br^2 = 2ab$.

   (d) Montrer que : $r^2 = 2a$ équivaut à : $(a-1)^2 + b^2 = 1$.

   (e) Conclure en donnant tous les nombres complexes z tels que $\varphi(z) \in \mathbf{R}$.

FIN DU SUJET