

Devoir Maison n°3

Exercice 1 : Un système linéaire à paramètre

Soit m un réel fixé.

On considère le système d'équations linéaires à paramètre suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$(S_m) \begin{cases} -x + y - mz = m + 2 \\ x - my + 2z = m - 2 \\ (m - 1)x + 2z = 4 \end{cases}$$

1. Écrire le système (S_m) sous forme matricielle.
2. Échelonner le système (S_m) en prenant comme pivot le coefficient de y en première ligne.
3. Résoudre le système (S_m) selon les valeurs de m , en précisant dans chaque cas son rang.

* * *

Exercice 2 : Séries alternées

Dans cet exercice, on considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ **décroissante** et **de limite nulle**.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

1. Un exemple : dans cette question seulement, on pose : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{1}{2^n}$.

Exprimer S_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Montrer que la suite (S_n) converge vers $\frac{2}{3}$.

On revient maintenant au cas général.

2. Écrire en extension les termes S_0, S_2, S_4 .
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, S_{2n+2} - S_{2n} \leq 0$.
4. Montrer que : (S_{2n+1}) est croissante.
5. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
6. Que peut-on en déduire ?

On note ℓ la limite de la suite (S_n) .

7. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, si n est pair alors $S_{n+1} \leq \ell \leq S_n$.
Que dire si n est impair ?
8. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}, |\ell - S_n| \leq u_{n+1}$.
9. **Traitement informatique d'un deuxième exemple.**

Dans cette dernière question, on pose : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{1}{n+1}$.

- (a) En important le module `matplotlib.pyplot` renommé en `plt`, écrire un script représentant graphiquement les valeurs de $(-1)^k u_k$ pour $k \in \llbracket 0, 100 \rrbracket$.
Les termes de cette suite seront représentés par des points non reliés.
- (b) Écrire en langage *Python* une fonction `somme(n)` renvoyant $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.
- (c) En modifiant la fonction `somme` et en utilisant le résultat de la question 8) écrire une fonction `limite(epsilon)` renvoyant une valeur approchée à ϵ près de la limite de la suite (S_n) .
- (d) Que renvoie `>>> limite(10**(-5))` ?
Comparer cette valeur à $\ln(2)$.

* * *