

I Définitions

1. Matrices réelles ou complexes
2. Matrices carrées, matrices lignes, matrices colonnes
3. Matrices triangulaires, matrices diagonales
4. Ensembles de matrices ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Matrices nulles, matrices identités

II Opérations sur les matrices

1. Produit externe
2. Somme matricielle
3. Combinaisons linéaires de matrices
4. Premières propriétés ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Produit matriciel
6. Propriétés du produit matriciel ($\rightarrow$ *Annexe*)
7. Puissances d'une matrice carrée ($\rightarrow$ *Annexe*)
8. Matrices inversibles ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Matrices et systèmes linéaires

1. Écriture matricielle d'un système linéaire
2. Rang d'une matrice, cas des matrices inversibles ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Trois méthodes d'inversion d'une matrice
4. Cas des matrices 2×2 ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Matrices diagonales et matrices triangulaires

1. Opérations sur les matrices diagonales ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Opérations sur les matrices triangulaires ($\rightarrow$ *Annexe*)

V Transposition

1. Définition
2. Propriétés ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Matrices symétriques, antisymétriques

Annexes

$\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. n, p, q, r sont des entiers naturels non nuls.

1.4 Ensembles de matrices :

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.

$\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices carrées à n lignes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.

$D_n(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales à n lignes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.

$T_n^+(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à n lignes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.

$T_n^-(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures à n lignes, à coefficients dans $\mathbf{K}$.

2.4 Propriétés de l'addition matricielle, et du produit externe : $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$

- 1 est l'élément-neutre du produit externe : $1.A = A$
- $0_{n,p}$ est l'élément-neutre de l'addition matricielle : $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$
- La multiplication scalaire est associative : $\lambda.(\mu.A) = (\lambda\mu).A = \lambda\mu.A$
- La somme matricielle est associative et commutative :
$$\begin{aligned} * (A + B) + C &= A + (B + C) = A + B + C \\ * A + B &= B + A \end{aligned}$$
- La multiplication par le scalaire 0 donne la matrice nulle : $0.A = 0_{n,p}$

2.6 Propriétés du produit matriciel : A, B, C sont des matrices de tailles convenables, et $\lambda \in \mathbf{K}$.

- Le produit matriciel n'est pas commutatif : en général, $AB \neq BA$.
- Il ne respecte pas la règle du produit de facteurs nul : $AB = 0_{n,p} \nRightarrow A = 0_{n,q}$ ou $B = 0_{q,p}$.
- Les matrices nulles sont absorbantes : $A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$ et $0_{q,n} \times A = 0_{q,p}$.
- Associativité : $A(BC) = (AB)C = ABC$.
- Distributivité à droite : $A(B + C) = AB + AC$.
- Distributivité à gauche : $(A + B)C = AC + BC$.
- Associativité : $\lambda.(AB) = (\lambda.A)B = A(\lambda.B) = \lambda.AB$
- Élément neutre : $I_n A = A I_p = A$.

2.7 Propriétés des puissances : A, B désignent des matrices carrées de même taille, et $\lambda \in \mathbf{K}$.

- Distributivité sur le produit externe : $(\lambda.A)^p = \lambda^p.A^p$
- Si $AB = BA$ (on dit alors que A et B **commutent**), alors :
 - $A^p \times B^q = B^q \times A^p$ (toute puissance de A commute avec toute puissance de B)
 - $(AB)^p = A^p B^p$ (distributivité sur le produit matriciel)
 - $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ (Formule du binôme de Newton)

2.8a Définition d'une matrice inversible :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, B est unique. On l'appelle **inverse** de la matrice A , et on la note : A^{-1} .

2.8b Propriétés de l'inverse :

- I_n est inversible, et est son propre inverse : $(I_n)^{-1} = I_n$.
- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible, et : $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A est inversible, alors pour tout entier naturel p , A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont inversibles, alors AB est inversible, et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.2a Rang d'une matrice :

Le **rang** d'une matrice est le rang de tout système linéaire associé à cette matrice.

3.2a Matrice inversible :

Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si son rang vaut $r = n$.

Dans ce cas, l'unique solution de l'équation matricielle $AX = B$ est : $X = A^{-1}B$.

Un système de **Cramer** correspond à une matrice **inversible**.

3.4 Inversion d'une matrice 2×2 :

Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est : $\det(M) = ad - bc$.

M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

Dans ce cas, l'inverse de M est : $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

4.1 Matrices diagonales :

- * L'ensemble $D_n(\mathbf{K})$ est stable par combinaisons linéaires :
 $\forall A, B \in D_n(\mathbf{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \lambda A + \mu B \in D_n(\mathbf{K})$.
- * L'ensemble $D_n(\mathbf{K})$ est stable par produit matriciel :
 $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n) \times \text{Diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{Diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$
- * Les matrices diagonales commutent toutes entre elles.
- * $\forall p \in \mathbf{N}, \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)^p = \text{Diag}(a_1^p, \dots, a_n^p)$
- * $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ est inversible si et seulement si : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i \neq 0$,
et dans ce cas : $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$

4.2 Matrices triangulaires :

- * L'ensemble $T_n^+(\mathbf{K})$ est stable par combinaisons linéaires :
 $\forall A, B \in T_n^+(\mathbf{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \lambda A + \mu B \in T_n^+(\mathbf{K})$.
- * L'ensemble $T_n^+(\mathbf{K})$ est stable par produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & * & * & * \\ 0 & b_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$* \forall p \in \mathbf{N}, \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & * & * & * \\ 0 & a_{22}^p & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

$$* \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ est inversible si et seulement si : } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ii} \neq 0,$$

$$\text{et dans ce cas : } \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & * & * & * \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

- * Mêmes résultats pour $T_n^-(\mathbf{K})$.

5.2 Propriétés de la transposition : A, B sont des matrices de tailles convenables, et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$.

- * ${}^t({}^tA) = A$
- * ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$
- * ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$
- * $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$
- * si A inversible, alors tA est inversible et :
 $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$