I Vocabulaire

1. Expérience aléatoire, univers
2. Événements, événements élémentaires
3. Événements certains, impossibles
4. Événement contraire, événements incompatibles
5. Système complet d'événements
6. Correspondances avec le vocabulaire ensembliste

II Probabilité

1. Espace probabilisé ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Propriétés des probabilités ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Probabilités des événements élémentaires
4. Probabilité uniforme ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Probabilité conditionnelle

1. Définition ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Formule des probabilités composées ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Formule des probabilités totales ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Formule de Bayes ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Indépendance

1. Indépendance de deux événements ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Indépendance 2 à 2 de n événements ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Indépendance mutuelle (forte) de n événements ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

2.1 Espace probabilisé :

On considère un univers fini Ω .

On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ vérifiant :

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- pour tous événements incompatibles A et B , on a $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

On appelle **espace probabilisé** tout couple $(\Omega, \mathbf{P})$ où Ω est un univers et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω .

2.2 Propriétés des probabilités :

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur un univers Ω fini. Soient A et B deux événements.

- $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ PROBABILITÉ DE L'ÉVÉNEMENT CONTRAIRE
- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ PROBABILITÉ DE L'ÉVÉNEMENT IMPOSSIBLE
- $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \bar{B})$ FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES
- Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.
- Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ CROISSANCE DE LA PROBABILITÉ
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ PROBABILITÉ DE LA RÉUNION
- Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements 2 à 2 incompatibles, alors : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$
- Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors : $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) = 1$

2.4 Formule d'équiprobabilité :

Soit Ω un univers fini, et $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur Ω . Alors pour tout événement A ,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

3.1 Probabilité conditionnelle :

Soient $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$.

$\mathbf{P}_A : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ B \mapsto \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} \end{cases}$ est une probabilité sur Ω appelée **probabilité conditionnelle sachant A** .

La probabilité conditionnelle de B sachant A est notée $\mathbf{P}_A(B)$ ou encore $\mathbf{P}(B|A)$.

3.2 Formule des probabilités composées :

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

$(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une famille finie d'événements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors on a : $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

3.3 Formule des probabilités totales :

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Soit un système complet d'événements $(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Alors, pour tout événement B , on a : $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(B \cap A_i)$

Si de plus aucun des A_i n'a une probabilité nulle, alors : $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}_{A_i}(B)$

3.4 Formule de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A, B deux événements de probabilités non nulles. Alors :

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \times \mathbf{P}_A(B)$$

4.1 Indépendance de A et B : A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$

Lorsque $\mathbf{P}(A) \neq 0$, on a également : A, B indépendants $\Leftrightarrow \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$

4.2 Indépendance 2 à 2 :

$A_1, \dots, A_n$ sont 2 à 2 **indépendants** lorsque $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}(A_j)$

4.3 Indépendance mutuelle :

$A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** lorsque $\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$