Devoir Maison n°4

Étude d'une suite récurrente d'ordre 3

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = -1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n + 2^n$$

1. **Traitement informatique**
   (a) Compléter le script suivant pour que la fonction `u(n)` renvoie u_n :
   ```
   def u(n) :
       u0, u1, u2 = ... , ... , ...
       for k in range(...) :
           u3 = ...
           u0 = ...
           u1 = ...
           u2 = ...
       return ...
   ```
   (b) Pour $n \geqslant 3$, donner l'expression de u_n en fonction des 3 termes précédents de la suite (u_n).
   (c) En déduire une fonction `u_recursif(n)` qui renvoie u_n par un procédé récursif.
   (d) *Hors programme BCPST*
   Laquelle de ces deux fonctions faut-il utiliser si on veut calculer u_{100} ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   Déterminer v_0 et v_1, puis montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + 6v_n + 2^n \quad (\mathcal{R})$
3. Déterminer une suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$, géométrique de raison 2, telle que (w_n) vérifie la relation $(\mathcal{R})$.
   On précisera son premier terme w_0.
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $x_n = v_n - w_n$.
   (a) Déterminer x_0 et x_1, puis montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$.
   (b) En déduire l'expression de x_n, puis celle de v_n, en fonction de $n \in \mathbf{N}$.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.
7. Soit $a \in]-3, 3[$. Expliquer pourquoi : $\lim \left(\dfrac{a}{3}\right)^n = 0$.
8. En déduire que : $u_n \sim \dfrac{1}{5} \times 3^n$.

* * *