

# DS n°4, mathématique

Durée : 3 heures

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation. L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 page recto/verso, et est constitué de quatre exercices indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

## Exercice 1 : Un système linéaire (5 points)

Soit  $a$  un réel fixé.  
On considère le système linéaire  $(S_a)$  : 
$$\begin{cases} ax - y + z &= 1 - a^2 \\ x + ay - z &= a^2 - 1 \\ x - y + az &= 0 \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

- On suppose dans cette question que  $a = 0$ .  
Réécrire le système  $(S_0)$  correspondant, puis le résoudre.  
On précisera son rang, et s'il est de Cramer.
- Dans le cas général, résoudre le système  $(S_a)$  selon les valeurs du paramètre  $a \in \mathbf{R}$ .  
Préciser dans chaque cas le rang de ce système.

Penser à factoriser les expressions qui apparaissent, pour repérer des simplifications !

## Exercice 2 : Évolution d'un système à deux états (5 points)

On considère une population (supposée constante) de  $N$  individus ( $N \in \mathbf{N}^*$ ).  
Dans cette population, au  $n$ -ième jour ( $n \geq 0$ ), on note  $M_n$  le nombre de personnes atteintes d'une certaine maladie, et  $S_n = N - M_n$  le nombre de personnes qui ne sont pas atteintes par cette maladie.  
Chaque nouveau jour, on estime qu'une proportion  $\alpha$  de personnes malades guérissent, et qu'une proportion  $\beta$  de personnes saines contractent la maladie ( $\alpha, \beta \in ]0, 1[$  sont fixés).

- Expliquer pourquoi, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a :  $M_{n+1} = (1 - \alpha)M_n + \beta S_n$ .
- En déduire que la suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence :  
$$\forall n \geq 0, M_{n+1} = (1 - \alpha - \beta)M_n + \beta N$$
- Traitement informatique :  
On modélise le nombre de malades au cours des  $(n + 1)$  premiers jours par la liste  $[M_0, M_1, \dots, M_n]$ .
  - Définir une fonction `evolution( $\alpha, \beta, N, Mn$ )`, qui à un nombre de malades  $M_n$  au jour  $n$  associe le nombre de malades  $M_{n+1}$  au jour  $(n + 1)$ , selon la formule établie **question 2**.
  - Écrire une fonction `listeMalades( $\alpha, \beta, N, M0, n$ )` qui renvoie la liste  $[M_0, \dots, M_n]$ .  
On initialisera une liste `L = [M0]` qu'on complètera à l'aide de la fonction `evolution`.
  - Proposer un script représentant graphiquement (par des points non reliés) le nombre de malades au cours des jours  $0, \dots, n$ , lorsque :  $\alpha = 10^{-1}$ ,  $\beta = 10^{-5}$ ,  $N = 10^7$ ,  $M_0 = 10^4$ .  
On pourra importer : `import matplotlib.pyplot as plt`
  - Écrire une fonction sans argument qui renvoie le jour au cours duquel pour la première fois le nombre de malades est inférieur à 2000 lorsque :  $\alpha = 10^{-1}$ ,  $\beta = 10^{-5}$ ,  $N = 10^7$ ,  $M_0 = 10^4$ .  
On utilisera une boucle `while` en supposant qu'elle ne soit pas infinie.
- D'après la **question 2**, de quel type est la suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  ?
- Déterminer l'expression explicite de  $M_n$ , en fonction du nombre  $M_0$  de personnes initialement malades, des constantes  $\alpha, \beta$  et  $N$ , et de l'entier  $n \geq 0$ .
- Justifier que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \alpha - \beta)^n = 0$ .
- En déduire que la suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  converge, et donner sa limite.

**Exercice 3 : Limites de suites** (3 points)

Déterminer les limites des suites définies par :

1.  $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n + \ln(n)} \times \sin\left(\frac{2n + \cos(n)}{3n^2 + 1}\right)$ .
2.  $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = \left(1 + \frac{n+2}{3n^2+1}\right)^{2n}$ .

**Exercice 4 : Étude d'une vitesse de convergence** (7 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

Dans cet exercice, on cherche une formule explicite de  $u_n$  en fonction de  $n$ , on montre que  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  puis on étudie la vitesse de convergence de  $(u_n)$ . Enfin on montre que les moyennes des premiers termes de  $(u_n)$  tendent également vers  $\ell$ .

1. Montrer par récurrence que :  $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ .
3. Écrire en langage *Python* une fonction récursive `u(n)` renvoyant la valeur de  $u_n$ .
4. On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}, v_n = u_n^2$ .
  - (a) Soit  $k \in \mathbf{N}$ . Exprimer  $v_{k+1} - v_k$  en fonction de  $k$ .
  - (b) En calculant de deux manières différentes  $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$ , montrer que :  $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n = 3 - 2^{1-n}$ .
  - (c) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \geq 0$ .
  - (d) Montrer que  $(u_n)$  converge et donner la valeur de sa limite  $\ell$ .
5. En remarquant que :  $\ell^2 - v_n = (\ell - u_n)(\ell + u_n)$ , montrer que :  $\ell - u_n \sim \frac{1}{2^n \sqrt{3}}$ .
6. On définit, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , la moyenne des  $n$  premiers termes de la suite  $(u_n)$  :

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

- (a) Écrire une fonction `moyenne(n)` d'argument un entier  $n \geq 1$  renvoyant la valeur de  $m_n$ .  
*On pourra utiliser la fonction `u(k)` de la question 3.*

- (b) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq \ell - u_k \leq \frac{2^{1-k}}{1 + \sqrt{3}}$$

- (c) On pose, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*, w_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\ell - u_k)$ .

Montrer que la suite  $(w_n)$  est croissante et majorée.

- (d) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \ell.$$

FIN DU SUJET