I Définition

1. Continuité ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Continuité à droite, à gauche
3. Continuité globale
4. Exemple des fonctions usuelles
5. Prolongement par continuité

II Opérations sur les fonctions continues

1. Opérations usuelles
2. Composition
3. Caractérisation par les suites

III Théorèmes des fonctions continues

1. Propriété de Bolzano-Weierstrass
2. Théorème des bornes ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Corollaires du TVI ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Théorème de la bijection continue ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Bijections réciproques usuelles

Annexes

1.1 Continuité

Soit f une fonction définie sur une partie D_f de $\mathbf{R}$. Soit $x_0 \in D_f$ un point d'accumulation de D_f . On dit que f est **continu en x_0** lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

3.2 Théorème des bornes : Soient $a < b$ deux réels, et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$, et atteint ses bornes : $\exists c_1, c_2 \in [a, b], \forall x \in [a, b], f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$

3.3 TVI : Soit I un intervalle réel, et soit f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle réel.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Énoncé équivalent : Si f est continue sur I , alors f atteint toute valeur strictement intermédiaire entre ses bornes inférieure et supérieure.

Énoncé équivalent : Si f est continue sur I , alors : $\forall a, b \in I, \forall y \in [f(a), f(b)], \exists c \in I, y = f(c)$.

3.4a Corollaire du TVI : Existence de racines

Soient $a < b$ deux réels et f continue sur le segment $[a, b]$.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors f s'annule sur $]a, b[$: $\exists c \in]a, b[, f(c) = 0$.

3.4b Corollaire du TVI : Fonction de signe constant

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I .

Alors f garde un signe constant sur I .

3.5 Théorème de la bijection continue

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors :

- f réalise une bijection de I sur $f(I)$, de bijection réciproque f^{-1} .
- $f(I)$ est un intervalle de même *nature* que I (ouvert, fermé, semi-ouvert).
- Si I est d'extrémités $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, alors $f(I)$ est d'extrémités $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.
- f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f .
- f^{-1} est continue sur $f(I)$.