Devoir Maison n°7

Probabilités et suites récurrentes

Chaque année, un arbre fruitier peut avoir beaucoup de fruits, ou peu.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note F_n l'événement : « La $n^{\text{ème}}$ année, l'arbre a beaucoup de fruits. »

On suppose que : * Si l'année précédente l'arbre a eu peu de fruits, alors la probabilité qu'il ait beaucoup de fruits l'année suivante vaut p ;
* si les deux années précédentes l'arbre a eu beaucoup de fruits, alors la probabilité qu'il ait beaucoup de fruits l'année suivante vaut q ;
* sinon, la probabilité qu'il ait beaucoup de fruits vaut r.

Dans tout le problème, $p, q, r \in]0, 1[$ sont fixés, et : $q < r < p$.

Les deux premières années de l'étude ($n = 1$ et $n = 2$), l'arbre a eu beaucoup de fruits.

1. Exprimer p, q, r comme probabilités conditionnelles portant sur les événements $(F_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Exprimer $\mathbf{P}(F_3)$ et $\mathbf{P}(F_4)$ en fonction de p, q, r.
3. Montrer que $\mathbf{P}(F_5) = q^3 + (1-q)pr + (1 - q^2 - p + pq)p$.
4. Soit $N \geqslant 3$. Exprimer la probabilité des événements :
   * A_N : "l'arbre a beaucoup de fruits au cours de toutes les années de 1 à N".
   * B_N : "l'arbre a beaucoup de fruits au moins une fois parmi les années 3 à N".
5. Sachant que l'arbre a eu beaucoup de fruits la quatrième année, quelle est la probabilité qu'il en ait eu beaucoup la troisième année ?
6. **Traitement informatique**
   Chaque année, on modélise pour l'arbre le fait d'avoir peu de fruits par l'entier 0 et le fait d'avoir beaucoup de fruits par l'entier 1. On résume l'état de la production au cours de N années ($N \geqslant 2$) par un entier de N chiffres, écrit avec des 0 et 1, et commençant par 11 car l'arbre a eu beaucoup de fruits les deux premières années. Par exemple : 11001101 signifie que l'arbre a eu beaucoup de fruits les années $1, 2, 5, 6$ et 8 (et peu de fruits les autres années).
   (a) Soit P_N un entier modélisant la production des N premières années.
   Quelles opérations (simples) permettent de calculer P_{N+1} selon que l'arbre ait eu beaucoup ou peu de fruits l'année $N+1$?
   (b) On rappelle que : `PN % 10 == 0` renvoie `True` si P_N est multiple de 10 (et `False` sinon).
   Que faut-il écrire pour tester si P_N finit par 11 ?
   (c) On rappelle que : `rd.random() < a` renvoie `True` avec une probabilité a, et `False` sinon.
   Écrire une fonction `anneeSuivante(PN,p,q,r)` renvoyant l'entier P_{N+1} connaissant P_N.
   (d) Écrire une fonction `production(N,p,q,r)` renvoyant une simulation de la production au cours de N années ($N \geqslant 2$), sachant que l'arbre a toujours beaucoup de fruits les 2 premières années.
   (e) En déduire une estimation du nombre moyen de fois où l'arbre a beaucoup de fruits pendant $N = 50$ ans, lorsque $p = 0,8$, $q = 0,2$ et $r = 0,3$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $u_n = \mathbf{P}(F_n)$.

7. Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \mathbf{P}(F_{n+1} \,|\, F_n)$.
   En utilisant le système complet d'événements $(F_n, \overline{F_n})$, montrer que : $a_n \times u_n = u_{n+1} - p\,(1 - u_n)$.
8. En utilisant le système complet d'événements $(F_n \cap F_{n+1}, \overline{F_n} \cap F_{n+1}, \overline{F_{n+1}})$, établir une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite (u_n).
9. Déterminer en fonction de p, q, r une constante ℓ telle que la suite constante (ℓ) vérifie la même relation de récurrence que (u_n).

On considère la relation de récurrence linéaire : $(*)$ $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+2} + (p-q)v_{n+1} + p(r-q)v_n = 0$.

10. Montrer que la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \ell$ vérifie $(*)$.
11. On suppose dans toute la suite que : $p = 0,8 \quad q = 0,2$ et $r = 0,3$.
    (a) Préciser la valeur de ℓ.
    (b) Résoudre $(*)$ en injectant les valeurs données pour p, q et r.
    (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
    (d) Au bout d'un grand nombre d'années, quelle est la probabilité que l'arbre donne beaucoup de fruits ?

* * *