DS n°5, mathématique

Durée : 3 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation. L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 feuille recto/verso, et est constitué de trois exercices indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Suite de matrice-colonnes *(7 points)*

On considère les matrices carrées $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & 17 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \\ 11 & 23 & -9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de matrice-colonnes $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de taille 3×1 définie par :

$X_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\forall n \geqslant 0,\ X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n \quad \mathbf{(1)}$.

On se servira de la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Calculer X_2.
2. Montrer que P est inversible, et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.
3. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer la matrice D.
4. On pose $\Delta = P^{-1}BP$ et on admet que : $\Delta = \mathrm{Diag}(1,2,0)$.
   On pose enfin : $\forall n \geqslant 0,\ Y_n = P^{-1}X_n$.
   Montrer que la relation **(1)** équivaut à : $\forall n \geqslant 0,\ Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.
5. On note a_n, b_n, c_n les coefficients de Y_n : $\forall n \geqslant 0,\ Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Calculer Y_0 et Y_1 et en déduire les valeurs de a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1.
6. Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ \begin{cases} a_{n+2} = a_n \\ b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n \\ c_{n+2} = c_{n+1} \end{cases}$
7. Déterminer l'expression générale des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$.
8. En déduire que : $\forall n \geqslant 0,\ X_n = \begin{pmatrix} 1 + 6(-1)^n + 2^n \\ -2 - 2(-1)^n \\ -4 + 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Dénombrement *(7 points)*

On pioche 4 cartes dans un jeu de 32 cartes.
On rappelle qu'un tel jeu contient 4 As, 4 Rois et 24 autres cartes.

1. On pioche les 4 cartes successivement, et avec remise.
   Dénombrer dans ce cas le nombre de tirages possibles.
2. On pioche les 4 cartes successivement, et sans remise.
   Dénombrer dans ce cas le nombre de tirages possibles.

Dorénavant, et jusqu'à la fin de l'exercice, on pioche les 4 cartes en un seul prélèvement.
On note :

T l'ensemble des tirages possibles
A l'ensemble des tirages contenant au moins un As
R l'ensemble des tirages contenant au moins un Roi
D l'ensemble des tirages contenant exactement un As et exactement 2 Rois

3. Quel est le cardinal de T ?
4. Déterminer le cardinal de D.
5. (a) Décrire en français l'ensemble $\overline{A}$, puis donner son cardinal.
   (b) En déduire le cardinal de A.
6. (a) Décrire l'ensemble $\overline{A} \cap \overline{R}$, puis le dénombrer.
   (b) En déduire le cardinal de $\overline{A} \cup \overline{R}$.
   (c) Montrer que : $\text{card}(A \cup R) = \binom{32}{4} - \binom{24}{4}$.
7. Déduire de la question **6b** le nombre de tirages contenant au moins un As et au moins un Roi.
8. Dénombrer les tirages contenant strictement plus d'As que de Rois.
   Indication : on pourra distinguer de tels tirages selon le nombre d'As qu'ils contiennent.
9. **Informatique**
   (a) Soit L une liste contenant des entiers.
   Écrire une fonction `compte(L,k)` qui renvoie le nombre de k présents dans la liste L.
   Par exemple, `>>> compte([1,0,1,0],1)` devra renvoyer 2,
   `>>> compte([1,0,1,0],2)` devra renvoyer 0.
   (b) Une liste modélise un tirage d'un certain nombre de cartes, de la façon suivante :
   - chaque As est modélisé par l'entier 1
   - chaque Roi est modélisé par l'entier 2
   - chacune des autres cartes (ni As, ni Roi) est modélisé par l'entier 0

   Écrire une fonction `plusdAs(L)` qui renvoie `True` si la liste L représente un tirage avec strictement plus d'As que de Rois, et `False` sinon.

Exercice 3 : Probabilités *(7 points)*

Dans une région, chaque jour, il y a du soleil, ou il pleut.
Pour tout $n \geqslant 1$, on note S_n l'événement « Il y a du soleil le jour n ». On suppose que :
- s'il y a du soleil un jour, alors la probabilité qu'il y ait du soleil le lendemain vaut $\frac{1}{3}$;
- s'il pleut un jour, alors la probabilité qu'il y ait du soleil le lendemain vaut $\frac{3}{5}$.

Au premier jour de l'étude ($n = 1$), on suppose qu'il y a du soleil.

1. Que dire de l'événement S_1 ? Quelle est sa probabilité ?
2. Pour tout $n \geqslant 1$, donner les valeurs des probabilités conditionnelles : $\mathbf{P}_{S_n}(S_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\overline{S_n}}(S_{n+1})$.
3. Déterminer $\mathbf{P}(S_2)$, puis $\mathbf{P}(S_3)$.
4. Sachant qu'il y a eu du soleil au jour 3, quelle est la probabilité qu'il ait plu la veille ?
5. On note, pour tout $n \geqslant 2$, P_n l'événement « il pleut tous les jours du jour 2 au jour n ».
   (a) Exprimer P_n en fonction des événements $S_2, \cdots, S_n$.
   (b) En déduire l'expression de $\mathbf{P}(P_n)$ en fonction de $n \geqslant 2$.
6. Pour tout $n \geqslant 1$, on note : $u_n = \mathbf{P}(S_n)$. On rappelle que u_1 a été calculé question **1.**
   (a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = -\frac{4}{15}u_n + \frac{3}{5}$.
   (b) Écrire en langage *Python* une fonction récursive d'argument n renvoyant la valeur de u_n.
   (c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.
7. Dans une mare, une grenouille chante 4 fois sur 5 s'il pleut, et 1 fois sur 5 s'il ne pleut pas.
   Déterminer la probabilité c_n pour que la grenouille chante le jour n.

Fin du sujet