Devoir Maison n°8

Limites et continuité

On considère la fonction f d'expression : $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Étudier la parité de f.
3. Résoudre dans $\mathcal{D}_f$ l'équation : $f(x) = 0$.
4. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. (a) Donner un équivalent simple de $f(x)$ en 0.
   (b) En déduire la limite de la fonction f en 0.
6. (a) On pose $x = 1+h$. Montrer que : $\forall h > -1, h \neq 0,\ f(1+h) = -\dfrac{\sin(\pi h)}{(1+h)(2h+h^2)}$.
   (b) En déduire la limite de la fonction f en 1.
7. Déduire des questions précédentes que f est prolongeable sur $\mathbf{R}$ en une fonction continue $\tilde{f}$. Que valent $\tilde{f}(-1)$, $\tilde{f}(0)$, $\tilde{f}(1)$?
8. **Informatique**
   (a) Définir la fonction $\tilde{f}$, qu'on nommera f.
   On traitera séparément les valeurs particulières de la question précédente.
   (b) Écrire un script représentant graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$.
   (c) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   Définir une fonction **itérative** d'argument $n \in \mathbf{N}$ renvoyant la valeur de u_n.
   (d) Même question avec une fonction **récursive**.

On pose pour $x \in \mathbf{R}$: $g(x) = \pi x(x^2-1)\cos(\pi x) - (3x^2-1)\sin(\pi x)$, et $h(x) = \pi^2 x^3 + (6-\pi^2)x$.

9. Justifier rapidement pourquoi les fonctions g et h sont dérivables sur $\mathbf{R}$.
10. Pour tout réel x, établir une relation simple entre $g'(x)$ et $h(x)$.
11. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $\mathbf{R}$. On posera : $\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{6}{\pi^2}}$.
12. En déduire le tableau de variations de g, puis le signe de $g(x)$ sur $[0, 2]$.
    On posera $M = g(\alpha)$, qu'on ne cherchera pas à calculer.
13. Montrer que : $\forall x \in]0,1[\cup]1,2],\ f'(x) > 0$.
14. En déduire que, pour tout $c \in [-\pi, 0]$, l'équation $\tilde{f}(x) = c$ admet une unique solution dans $[0, 2]$.
15. En tenant compte de tous les renseignements précédents, donner l'allure de la courbe représentative de $\tilde{f}$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.

* * *