Exercice 1 . Les sous-ensembles suivants de $\mathbf{C}^4$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4, x - y + z + t = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4, x - y + z + t = 1\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4, x = 0 \text{ et } y = 0\}$.
4. $E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{C}^4, x = 0 \text{ ou } y = 0\}$.

Exercice 2 . Dire si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
Le cas échéant, en donner une base.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, |x| = |z|\}$
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x = -y = 2z\}$.
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x = y \text{ ou } x = 2y\}$.
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - 2y + 3z = 0\}$.
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x = 0\}$.

Exercice 3 . Dans $\mathbf{R}^5$, on considère l'ensemble :

$$F = \{(x, y, z, t, u), x + 2y + 3z + t - u = 0 \text{ et } x + 2y + z + t + u = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^5$.
2. Quelle est la dimension de F ? En donner une base.

Exercice 4 . Dans $\mathbf{C}^4$, on considère l'ensemble : $E = \{(a + 2b, -a + 3b, a, b), a, b \in \mathbf{C}\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^4$.
2. En donner une base.
3. Donner un système d'équations cartésiennes de E .

Exercice 5

1. La famille (u, v, w) avec $u = (1, 0, 1)$, $v = (2, 0, 1)$ et $w = (0, -1, 2)$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^3$?
2. La famille (u, v, w) avec $u = (2, 3)$, $v = (1, 1)$ et $w = (4, 5)$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^2$?

Exercice 6 . Soit (e_1, e_2, e_3) une famille libre de $\mathbf{K}^n$.

Montrer que $(e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ est aussi une famille libre de $\mathbf{K}^n$.

Exercice 7 . Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 1, -1), \quad u_2 = (1, 0, 1), \quad \text{et} \quad u_3 = (1, 1, 0).$$

1. Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit $v = (1, 2, 1)$. Donner les coordonnées de v dans cette base.

Exercice 8 . Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la famille de vecteurs donnée par :

$$\mathcal{F} = ((1, 1, -1), (1, 2, 1)).$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbf{R}^3$.
2. Compléter cette famille pour former une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 9 . Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (2, 3, -1), \quad u_2 = (1, -1, -2) \quad \text{et} \quad v_1 = (3, 7, 0), \quad v_2 = (5, 0, -7).$$

Montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

Exercice 10 . Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs : $u = (1, 2, 1)$, $v = (-1, 8, 1)$ et $w = (-2, 1, -1)$.
On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$. Déterminer la dimension de F ainsi qu'une base de F .

Exercice 11 . Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$u = (1, 1, 0, -1), \quad v = (1, 0, 0, -1) \quad \text{et} \quad w = (1, 0, -1, 0)$$

1. La famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbf{R}^4$?
2. On note $E = \text{Vect}(u, v, w)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z, t pour que $(x, y, z, t) \in E$.
3. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, x + y - z + t = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
4. Donner une base de $E \cap F$.

Exercice 12 . Soient $m \in \mathbf{R}$ et les vecteurs suivants de $\mathbf{R}^4$:

$$u_1 = (m, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, m, 1, 1), \quad u_3 = (1, 1, m, 1) \quad \text{et} \quad u_4 = (1, 1, 1, m).$$

1. Pour quelles valeurs de m les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 sont-ils linéairement indépendants?
2. Quand ces vecteurs sont liés, calculer la dimension de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Exercice 13 . Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les cinq vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, 1, -1), \quad u_2 = (1, -1, 2, 0), \quad u_3 = (-1, 2, 1, -2), \quad u_4 = (-2, 3, 1, 0) \quad \text{et} \quad u_5 = (-1, 3, 5, 3).$$

Montrer que ces cinq vecteurs forment une partie liée.

Exercice 14 . Dans $\mathbf{R}^3$, soient les vecteurs : $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -2, 1)$ et $w = (1, 3, 0)$.

1. Soit $F = \text{Vect}(u, v)$. Déterminer la dimension de F .
2. Soit $G = \text{Vect}(v, w)$. Déterminer la dimension de G .
3. Montrer que : $\text{Vect}(v) \subset F \cap G \subset F$.
4. En déduire les valeurs possibles pour la dimension de $F \cap G$.
5. Montrer que u n'appartient pas à G .
6. Conclure sur la dimension de $F \cap G$. En déduire une base de $F \cap G$.

Exercice 15

1. Soit $F = \text{Vect}((-3, 2, 1), (-5, 3, 2)) \subset \mathbf{R}^3$.
 - a. Montrer que : $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}$.
 - b. Déterminer a de manière à ce que $u = (a, 1, 1)$ appartienne à F .
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x - y + 5z = 0\}$ et $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y + 3z = 0\}$.
On admet que G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
 - a. Vérifier que u appartient à G et à H .
 - b. Résoudre le système :
$$(S) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$
 - c. En déduire que $F \cap G \cap H$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par u .