

Exercice 1 . Déterminer les primitives des fonctions suivantes (primitivation "à vue")

- | | | |
|--|-----------------------------------|---|
| 1. $x \mapsto x^3 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x-2}$ | 4. $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ | 7. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| 2. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ | 5. $x \mapsto \cos(x) \sin(x)$ | 8. $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{Arctan}(x)}$ |
| 3. $x \mapsto xe^{x^2}$ | 6. $x \mapsto \tan(x)$ | 9. $x \mapsto \sin^2(x) \cos^3(x)$ |

Exercice 2 . Déterminer les primitives des fonctions suivantes (primitivation par parties)

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|--|
| 1. $x \mapsto xe^x$ | 3. $x \mapsto x^3 \ln(x)$ | 5. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ |
| 2. $x \mapsto 2x \sin(x)$ | 4. $x \mapsto \ln(1+x^2)$ | 6. $x \mapsto \cos(x)e^{2x}$ |

Exercice 3 . Déterminer les primitives des fonctions suivantes (changement de variable)

- | | | | |
|--|---|---------------------------------------|------------------------------|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ | 2. $x \mapsto \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}$ | 3. $x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ | 4. $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ |
|--|---|---------------------------------------|------------------------------|

Exercice 4 . Déterminer les primitives des fonctions suivantes (linéarisation)

- | | | |
|--------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $x \mapsto \sin^2(x)$ | 2. $x \mapsto \cos^2(x) \sin^2(x)$ | 3. $x \mapsto \cos(3x) \sin^2(2x)$ |
|--------------------------|------------------------------------|------------------------------------|

Exercice 5 . Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| 1. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ | 4. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ | 7. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ |
| 2. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx$ | 5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} d\theta$ | 8. $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx$ |
| 3. $\int_1^e \ln^2(x) dx$ | 6. $\int_0^\pi t \sin(t) \cos^2(t) dt$ | |

Exercice 6 . On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

- Montrer que (u_n) est une suite décroissante, en déduire que (u_n) est une suite convergente.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 7 . Avec des majorations.

- Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 t^n g(t) dt$.
Montrer que (u_n) tend vers 0.
- Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+t^n} \sin(nt) dt$. Calculer la limite de (v_n) .

Exercice 8 . On considère la fonction H définie par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de H .
- Démontrer que H est dérivable sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ et déterminer H' .
- Soit $x > 1$. Montrer que : $e^x \ln x \leq H(x)$.
- En déduire la limite de H en $+\infty$.
- Préciser la nature de la branche infinie de H au voisinage de $+\infty$.

Exercice 9 . Lemme de Lebesgue

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

- Rappeler pourquoi la fonction f' est bornée.
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.

Exercice 10 . Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(a+b-x) = f(x).$$

1. Montrer que : $\int_a^b x f(x) \, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \, dx$.
2. En déduire la valeur de : $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} \, dx$.

Exercice 11 . *Sommes de Riemann.*

1. Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) \right) - \ln n.$$

2. Donner un équivalent en $+\infty$ de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=0}^n ((n+k)^3 - (n-k)^3).$$

Exercice 12 . Soient $p, q \in \mathbf{N}$. On pose : $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$.

1. Montrer que $I(q, p) = I(p, q)$.
2. Exprimer $I(p+1, q)$ à l'aide de $I(p, q+1)$.
3. Calculer $I(0, q)$. En déduire $I(p, q)$.

Exercice 13 . On considère les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \, dx.$$

1. Déterminer des réels a, b et c tels que : $\forall u \neq -1, \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{a}{1+u} + \frac{bu+c}{1+u^2}$.
2. Calculer I en effectuant le changement de variable $u = \tan x$.
3. Calculer $I+J$ et $I-J$. Retrouver la valeur de I .

Exercice 14 . Calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \ln x \, dx$.

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{x}$.