Exercice 1 . Soit n un entier naturel non nul et P_n le polynôme défini par :

$$P_n = \left(1 + (-1)^n\right)X^{2n} + (n-3)X^{2n-1} + n^2 - n.$$

Déterminer le degré de P_n en fonction de l'entier n.

Exercice 2 . Montrer qu'il existe un unique polynôme P, de degré $\leqslant 3$, tel que :

$$P(0) = 2, \quad P'(0) = 3, \quad P''(0) = 4 \quad et \quad P'''(0) = 5.$$

Exercice 3 . Soit $P = X^6 - 3X^5 + 5X^4 - 6X^3 + 3X^2 + X - 1$.
(a) Quelle est la multiplicité de 1 en tant que racine de P ?
(b) Même question pour $Q_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n \quad (n \geqslant 2)$.

Exercice 4 . Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$, lorsque cela a un sens, les polynômes suivants :

* $P_1 = 2X^2 + 5X - 3$
* $P_2 = 3X^2 - 6X + 6$
* $P_3 = X^4 - 1$
* $P_4 = X^4 + 1$
* $P_5 = X^4 - 4X^2 - 21$
* $P_6 = 2X^6 + 2$
* $P_7 = X^4 + 7X^3 + 12X^2 + 7X + 1$
* $P_8 = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$
* $P_9 = X^6 + X^3 + 1$
* $P_{10} = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
* $P_{11} = 2X^6 + i$
* $P_{12} = X^8 - 1$
* $P_{13} = 1 + X^2 + X^4$

Exercice 5 .
Soit $n \geqslant 1$. Démontrer que $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ se factorise par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 6 . Soit $n \geqslant 1$. On considère le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.
Déterminer les réels a et b pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 7 . À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbf{R}$ le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ se factorise-t-il par le polynôme $B = X^2 + X + 1$?

Exercice 8 .

1. Soit $n \geqslant 1$. On considère un polynôme P de degré n.
   Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes : $Q = X^2P' + P$ et $R = XP' + P$.
2. On considère la suite de polynômes $(R_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} R_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad R_{n+1} = (1+X^2)R_n' - 2(n+1)XR_n. \end{cases}$$

   Déterminer R_1, R_2, R_3.
   Déterminer en fonction de n le degré et le coefficient dominant de R_n.

Exercice 9 . Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ satisfaisant à la relation :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X)$$

Indication : On pourra dans un premier temps s'intéresser au degré d'une éventuelle solution.

Exercice 10 . Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère le polynôme P_n défini par :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}.$$

1. Trouver une relation entre ${P_n}'$ et P_{n-1}.
2. Montrer que P_n n'a pas de racine multiple.

Exercice 11 . Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme tel que $P(-X) = P(X)$.
Démontrer que tous les monômes de P sont de degré pair.

Exercice 12 . Soit P un polynôme à coefficients réels.
Montrer que si z est une racine complexe de P de multiplicité m alors $\bar{z}$ est racine de P de même multiplicité.

Exercice 13

1. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$.
   On suppose : $\forall i \in [\![0, n]\!], P(i) = Q(i)$. Démontrer que $P = Q$.
2. Soit P un polynôme. On suppose que : $\forall t \in [0, \pi],\ P(\sin t) = 0$. Démontrer que $P = 0$.

Exercice 14 . Soit P un polynôme périodique de période T $(T > 0)$.

1. Montrer que le polynôme $Q = P - P(0)$ est le polynôme nul.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 15 . On considère deux polynômes P et Q de degrés inférieurs ou égaux à 3 tels que :

$$P(0) = Q(0), \quad P'(0) = Q'(0), \quad P''(0) = Q''(0) \quad \text{et} \quad P^{(3)}(0) = Q^{(3)}(0).$$

Démontrer que $P = Q$ en utilisant le polynôme $R = P - Q$.

Exercice 16 [Polynômes de Lagrange]
Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.

1. Dans le cas $n = 2$, écrire L_0, L_1 et L_2 sans le symbole $\prod$.
2. Soit $i \in [\![0, n]\!]$, déterminer le degré de L_i, ses racines, la valeur de $L_i(x_i)$.
3. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.
4. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i = P$.