On considère les applications suivantes :

$f_1 : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ définie par : $f_1(x,y,z,t) = (y,y)$.

$f_2 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ définie par : $f_2(x,y,z) = (x+2, y+1, z-2)$.

$f_3 : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ définie par : $f_3(x,y,z,t) = (x+y-t, x+y+z+t, y-z+t, x+y-z+t)$.

$f_4 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ définie par : $f_4(x,y,z) = (3x+y+3z, x+2y-4z, y-3z, 2x-y+7z)$.

$f_5 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ définie par : $f_5(x,y) = (x+y, xy)$.

$f_6 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ définie par : $f_6(x,y,z) = (x+2y, y, x+z)$.

$f_7 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ définie par : $f_7(x,y) = (x, y, x+y)$.

Exercice 1 . Pour chacune des applications ci-dessus, dire si elle est linéaire ou non.

Exercice 2 . Déterminer les applications $f_1 \circ f_3$ et $f_4 \circ f_6$.

Exercice 3 . Déterminer, pour chacune des applications linéaires ci-dessus :

1. une base du noyau, le rang de l'application linéaire et une base de son image ;
2. si elle est injective, surjective, bijective. Donner la réciproque des applications linéaires bijectives.

Exercice 4 . Soient $\mathcal{B} = (i,j,k)$ une base de $\mathbf{R}^3$, f et g des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $f \circ f = f$. Déterminer le noyau et l'image de f. *On dit que f est un projecteur.*
2. Montrer que $g \circ g = \mathrm{Id}$. En déduire le noyau et l'image de g. *On dit que g est une symétrie.*

Exercice 5 . Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(1,0,0) = (-2,-2,-4), \quad f(0,1,0) = (-3,-1,-4) \quad \text{et} \quad f(0,0,1) = (3,2,5).$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
2. Soit $N = \{u \in \mathbf{R}^3,\ f(u) = 0\}$ et $I = \{u \in \mathbf{R}^3,\ f(u) = u\}$.
   Justifier que N et I sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$, en donner des bases $\mathcal{B}_N$ et $\mathcal{B}_I$.
3. Montrer que la réunion des deux bases $\mathcal{B}_N$ et $\mathcal{B}_I$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.
4. Écrire la matrice B de f dans cette base.

Exercice 6 . L'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3).
On considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$.
2. Soient $u = e_1 + e_2 - e_3$, $v = f(e_1)$ et $w = f(e_2)$. Justifier que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 7 . Soit $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ (x,y) \mapsto (2x-4y, x-2y)$.

1. Calculer la composée $u \circ u$.
2. Déterminer le noyau et l'image de u. Que remarque-t-on ? Peut-on l'expliquer ?
3. Soit $a \in \mathbf{R}^2$ tel que $u(a) \neq 0$, et $b = u(a)$. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (a,b)$ est libre, puis que c'est une base de $\mathbf{R}^2$. *Essayez de faire la preuve dans le cas général.*
4. Calculer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 8 . Dans $\mathbf{R}^3$ muni d'une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans cette base est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Déterminer f^2 et justifier que : $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Exercice 9 . On considère l'application linéaire f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + 2y - z, -x + y + z) \end{aligned}$$

1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.
2. On pose $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$, $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (1, 1)$.
   a. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et que $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
   b. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 10 . Soient $\mathbf{R}^3$ muni d'une base (e_1, e_2, e_3) et f l'endomorphisme dont la matrice relativement à cette base est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $u = e_3$, $v = e_1 - e_2$ et $w = e_1 + e_2$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base (u, v, w).
3. En déduire, pour tout entier naturel n, la matrice de f^n dans la base (u, v, w).
4. Comment en déduit-on la matrice de f^n dans la base (e_1, e_2, e_3) ?

Exercice 11 . Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ une base de $\mathbf{R}^4$ et f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. f est-il bijectif ?
2. Soit F l'ensemble des vecteurs invariants par f. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et en donner une base (u_1, u_2).
3. Soit G l'ensemble des vecteurs u de $\mathbf{R}^4$ tels que $f(u) = -u$.
   Montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension 1 et en donner une base (v).
4. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, v, b_1)$ est une base de $\mathbf{R}^4$.
   Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.
5. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
6. Écrire la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}_1$.