Exercice 1 . Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $3y' + 5y + 1 = 0$
2. $u + \tau \dfrac{du}{dt} = E \quad$ où $\tau, E \in \mathbf{R}_+^\star$, $\quad u(0) = 0$.

Exercice 2 .

1. Soit l'équation différentielle suivante sur $\mathbf{R}$: $(E) \quad y' + 2y = 2x^2 + 3$.
   a. Trouver une solution particulière de (E) sous forme d'un polynôme de degré 2.
   b. Résoudre alors l'équation (E).
2. Soit l'équation différentielle suivante sur $\mathbf{R}$: $(E) \quad y' - y = 3e^t + 2$.
   a. Trouver une solution particulière de l'équation $y' - y = 3e^t$ sous la forme ate^t.
   b. En déduire une solution particulière de (E).
   c. Résoudre enfin l'équation (E).

Exercice 3 . Donner les solutions générales sur $\mathbf{R}$ des équations différentielles suivantes, puis calculer la solution vérifiant les conditions initiales données :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y'(0) = y(0) = 1$.
2. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.
3. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$.

Exercice 4 . Résoudre les équations différentielles :

1. $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = E, \quad \omega, E \in \mathbf{R}_+^\star$,
2. $y'' - 3y' + 2y = x^3$ (on cherchera une solution polynômiale de degré 3).
3. $y'' - 2y' + y = e^x + xe^{-x}$ (on cherchera à superposer des solutions en $\lambda x^2 e^x$ et $(ax+b)e^{-x}$).
4. $y'' - y = e^{-x}\cos x$ (on cherchera une solution de la forme $e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$).

Exercice 5 . Résoudre les équations différentielles suivantes sur les ensembles indiqués.

1. $y' + xy = x$, sur $\mathbf{R}$.
2. $\dfrac{dC}{dt} + k_2 C = a_0 e^{-k_1 t}$, sur $\mathbf{R}$.
3. $y' - y\tan x = -\cos x$, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. $y'\cos x + y \sin x = x$, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 6 . Résoudre l'équation différentielle : $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$, où $y^{(4)}$ désigne la dérivée d'ordre 4 de y.
Indication : on pourra poser $z = y'' - y$ et rechercher une équation différentielle vérifiée par z. Puis on superposera des solutions en λxe^x et λxe^{-x}.

Exercice 7 . Déterminer les fonctions f dérivables telles que : $\forall\, x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = f(-x)$.
Indication : on pourra montrer que f est deux fois dérivable et chercher une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.

Exercice 8 . Dans un élevage de poules "Isabrown", on note P la masse d'une poule (en grammes) en fonction de temps t (en semaines). On suppose que c'est une fonction dérivable de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+^\star$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle (trouvée expérimentalement) :

$$(E) \qquad P' = 0,25P - 0,000125P^2$$

1. Supposons qu'il existe une solution P définie sur un intervalle I non vide et sur lequel la fonction P ne s'annule pas. Pour tout t dans I, on pose alors $y(t) = \dfrac{1}{P(t)}$.

   Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction y et donner ses solutions.
2. En déduire les solutions P de l'équation (E).
3. On remarque qu'une poule de 4 semaines pèse 200 g. Quel sera son poids à 12 semaines ? Vers quelle valeur son poids tendra-t-il à se stabiliser ?

Exercice 9 . Soit (E_1) l'équation différentielle : $x^2y'' + xy' - y = 0, \quad x \in]0, +\infty[$.

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par $y(x) = x$ est solution de (E_1) .
2. Soit y une solution de (E_1) et z la fonction définie par la relation $y(x) = xz(x)$.
   Trouver une équation différentielle du premier ordre, notée (E_2), et vérifiée par z'.
3. Trouver les solutions de (E_2), et en déduire celles de (E_1).

Exercice 10 . On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x^2y'' + y = 0, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Soit y une solution de l'équation (E). On effectue le changement de variables $x = e^t$, et on considère la fonction z définie sur $\mathbf{R}$ par $z(t) = y(e^t)$.

1. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par z.
2. En déduire les solutions de l'équation (E).