I Vecteurs du plan ou de l'espace

1. Définition
2. Produit externe, addition vectorielle
3. Vecteurs colinéaires, orthogonaux
4. Bases du plan ou de l'espace
5. Repères du plan ou de l'espace
6. Opérations sur les coordonnées
7. Déterminant de deux vecteurs du plan ($\rightarrow$ *Annexe*)

II Produit scalaire

1. Définition ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Caractérisation de l'orthogonalité ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Propriétés du produit scalaire ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Produit scalaire en base orthonormée ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Droites et cercles du plan

1. Représentation paramétrique d'une droite du plan ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Équation cartésienne d'une droite du plan ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Distance d'un point à une droite
4. Cercles du plan

IV Plans de l'espace

1. Plan défini par trois points non alignés
2. Représentation paramétrique d'un plan ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Équation cartésienne d'un plan ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Distance d'un point à un plan

V Droites de l'espace

1. Positions relatives de deux droites de $\mathcal{E}$
2. Représentation paramétrique d'une droite de $\mathcal{E}$ ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Système d'équations cartésiennes d'une droite de $\mathcal{E}$

Annexes

<u>1.7a Déterminant de deux vecteurs du plan</u> Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.

On appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

<u>1.7b Critère de colinéarité dans le plan</u> : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

<u>1.7c Critère de colinéarité dans l'espace</u>

Deux vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ de l'espace sont colinéaires si, et seulement si :

$$\begin{cases} xy' - x'y = 0 \\ yz' - y'z = 0 \\ zx' - z'x = 0 \end{cases} \quad \textit{ou encore :} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = 0$$

On dira que les déterminants extraits de rang 2 sont tous nuls.

<u>2.1 Produit scalaire</u> : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace.

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ défini par : $\vec{u} \bullet \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Si l'un des vecteurs est nul, on pose : $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

<u>2.2 Vecteurs orthogonaux</u> : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

<u>2.3 Propriétés du produit scalaire</u> : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont 3 vecteurs de $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{E}$, et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

$\vec{u} \bullet \vec{u} = ||\vec{u}||^2 \in \mathbf{R}_+$ $\qquad$ $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Symétrie du produit-scalaire : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

Bilinéarité du produit-scalaire : $\begin{cases} (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \bullet \vec{w} = \lambda(\vec{u} \bullet \vec{w}) + \mu(\vec{v} \bullet \vec{w}) \\ \vec{w} \bullet (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda(\vec{w} \bullet \vec{u}) + \mu(\vec{w} \bullet \vec{v}) \end{cases}$

<u>2.4 Produit scalaire et distances en base orthonormée</u>

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ dans une base **orthonormée** $\mathcal{B}$ du plan.

Alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$, et $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$A(x_a, y_a), B(x_b, y_b)$ sont 2 points du plan rapporté à un repère orthonormé. Alors : $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ dans une base **orthonormée** $\mathcal{B}$ de l'espace.

Alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy' + zz'$, et $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$A(x_a, y_a, z_a), B(x_b, y_b, z_b)$ sont 2 points de l'espace rapporté à un repère orthonormé.

Alors : $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$

<u>3.1 Représentation paramétrique d'une droite du plan</u> $\begin{cases} x = x_A + \lambda\, a \\ y = y_A + \lambda\, b \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}$

est un système d'équations paramétriques de la droite dirigée par $\vec{u}(a,b)$ et passant par $A(x_A, y_A)$.

<u>3.2 Équation cartésienne d'une droite du plan</u> $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

est, dans un repère orthonormé, une équation cartésienne de la droite de vecteur normal $\vec{n}(a,b)$ et passant par $A(x_A, y_A)$.

<u>4.2 Représentation paramétrique d'un plan de l'espace</u> $\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_A + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_A + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$

est un système d'équations paramétriques du plan dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$, et passant par $A(x_A, y_A, z_A)$.

<u>4.3 Équation cartésienne d'un plan de l'espace</u> $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

est, dans un repère orthonormé, une équation cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ et passant par $A(x_A, y_A, z_A)$.

<u>5.2 Représentation paramétrique d'une droite de l'espace</u> $\begin{cases} x = x_A + \lambda\, \alpha \\ y = y_A + \lambda\, \beta \\ z = z_A + \lambda\, \gamma \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}$

est un système d'équations paramétriques de la droite dirigée par $\vec{u}(a,b,c)$ et passant par $A(x_A, y_A, z_A)$.