Corrigé du DM n°8

Limites et continuité On pose : $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)}$.

1. f est définie en x tel que : $x(x^2-1) \neq 0$, donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{-1,0,1\}.}$
2. $\mathcal{D}_f$ est centré (symétrique par rapport à 0).
   $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = \dfrac{\sin(-\pi x)}{(-x)((-x)^2-1)} = \dfrac{-\sin(\pi x)}{-x(x^2-1)} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$
3. Soit $x \in \mathcal{D}_f$. Alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = k\pi (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$.
   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ est l'ensemble } \mathbf{Z} \text{ des entiers relatifs privés de } -1,0,1.}$
4. $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{|x(x^2-1)|}$ et par règle sur les fractions rationnelles : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x(x^2-1)} = 0$.
   Par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.}$
5. On sait que $\sin(\pi x) \underset{0}{\sim} \pi x$, ainsi que : $(x^2-1) \underset{0}{\sim} -1$ donc par opérations : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi x}{-x} = -\pi.}$
   On en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\pi.}$
6. Soit h tel que $1+h \in \mathcal{D}_f$. Alors : $f(1+h) = \dfrac{\sin(\pi(1+h))}{(1+h)((1+h)^2-1)} = \dfrac{\sin(\pi h + \pi)}{(1+h)(2h+h^2)}$.
   On sait que : $\forall t \in \mathbf{R},\ \sin(t+\pi) = -\sin(t)$, donc : $\boxed{f(1+h) = -\dfrac{\sin(\pi h)}{(1+h)(2h+h^2)}.}$
   On cherche ensuite un équivalent de f en 1, ce qui revient à chercher un équivalent de $f(1+h)$ quand h tend vers 0.
   Vu ce qui précède, et puisque $(2h+h^2) \underset{0}{\sim} 2h$, on obtient : $f(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} -\dfrac{\pi h}{1 \times 2h} = -\dfrac{\pi}{2}$.
   Ainsi, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{\pi}{2}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}.}$
7. On pose : $\boxed{\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in \mathcal{D}_f, \text{ et } \tilde{f}(-1) = \tilde{f}(1) = -\dfrac{\pi}{2},\ \tilde{f}(0) = -\pi.}$
   Par opérations, f est continue sur $\mathcal{D}_f$ donc $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{-1,0,1\}$.
   Vu les questions **5b, 6b**, on a : $\lim\limits_{0} \tilde{f} = \tilde{f}(0)$ et (par parité) $\lim\limits_{\pm 1} \tilde{f} = \tilde{f}(\pm 1)$.
   Ainsi, $\tilde{f}$ est continue aussi en -1, en 0 et en 1. En conclusion : $\boxed{\tilde{f} \text{ est un prolongement continu de } f \text{ sur } \mathbf{R}.}$
8. (a) Définition de $\tilde{f}$:

```
from math import sin, pi
def f(x) :
    if x == 0 : return -pi
    if x**2 == 1 : return -pi/2
    return sin(pi*x)/(x*(x**2-1))
```

   (b) Représentation graphique

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
X = np.linspace(-2,2)
Y = [f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

   (c) Définition itérative de (u_n) :

```
def uIter(n) :
    u = 1/2
    for _ in range(n) : u = f(u)
    return u
```

   (d) Définition récursive de (u_n) :

```
def uRec(n) :
    if n == 0 : return 1/2
    return f(uRec(n-1))
```

9. Par opérations sur des fonctions usuelles, $\boxed{g \text{ et } h \text{ sont de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.}$

10. Soit $x \in \mathbf{R}$, on a : $g'(x) = \pi(3x^2-1)\cos(\pi x) - \pi^2(x^3-x)\sin(\pi x) - \big(6x\sin(\pi x) + \pi(3x^2-1)\cos(\pi x)\big)$,
    donc $g'(x) = -\sin(\pi x)\left(\pi^2(x^3-x)+6x\right)$, soit : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x) = -\sin(\pi x)h(x).}$

11. On factorise : $h(x) = \pi^2 x(x^2-\alpha^2) = \pi^2 x(x-\alpha)(x+\alpha)$ en posant $\alpha = \sqrt{1-\dfrac{6}{\pi^2}}$.
    On en déduit le signe de $h(x)$ pour x réel :

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

12. On en déduit le signe de $g'(x)$ puis les variations de g sur $[0,2]$:

x	0		α		1		2
$h(x)$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$-\sin(\pi x)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\nearrow$	6π

    D'après le tableau de variations de g : $\boxed{g > 0 \text{ sur }]0,1[\cup]1,2] \text{ et } g \text{ s'annule en } 0 \text{ et en } 1.}$

13. Soit $x \in \mathcal{D}_f$. Par opérations, f est dérivable en x et : $f'(x) = \dfrac{\pi x(x^2-1)\cos(\pi x) - \sin(\pi x)(3x^2-1)}{x^2(x^2-1)^2}$

donc $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(x^2-1)^2}$. Vu la question précédente, on en déduit que : $\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,2],\ f'(x) > 0.}$

14. D'après la question précédente, f est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,2]$, donc $\tilde f$ aussi.
    Montrons que $\tilde f$ est strictement croissante sur l'intervalle $I = [0,2]$:
    $\star$ $\forall x \in]0,1[,\ -\pi = \tilde f(0) < f(x) = \tilde f(x) < -\dfrac{\pi}{2} = \tilde f(1)$.
    $\star$ $\forall x \in]1,2],\ -\dfrac{\pi}{2} = \tilde f(1) < f(x) = \tilde f(x)$.
    Ainsi $\tilde f$ est strictement croissante sur $[0,2]$.
    $\tilde f$ est donc <u>continue</u> et <u>strictement croissante</u> sur <u>l'intervalle</u> $I = [0,2]$.
    D'après le **théorème de la bijection**, elle réalise une bijection de I dans $\tilde f(I) = [-\pi, 0]$.
    En conséquence : $\boxed{\forall c \in [-\pi,0], \text{ l'équation } \tilde f(x) = c \text{ possède une unique solution dans } I.}$

    <u>Allure de $\mathcal{C}_{\tilde f}$</u> :