Devoir Maison n°9

Suite de racines

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^n \ln(x)}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. **Étude des fonctions f_n**
   (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que f_n est continue sur $\mathbf{R}_+^\star$.
   (b) Pour quelles valeurs de n la fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   (c) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$ (on donnera un équivalent et on distinguera plusieurs cas).

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que n est un entier supérieur ou égal à 2.

2. **Variations de f_n sur $[1,+\infty[$**
   (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que :
   $$\forall x \in [1,+\infty[,\ f_n'(x) = \frac{2x^{n-1}}{(x^2-1)^2}\left[(n-2)(x^2-1)\ln x + (x^2-1-2\ln x)\right]$$
   (b) Montrer que : $\forall x \in]1,+\infty[,\ x^2-1-2\ln x > 0$.
   (c) Établir le tableau de variations de f_n sur $[1,+\infty[$.
3. **Étude d'une suite définie implicitement**
   On considère l'équation $\quad (E_n) : f_n(x) = 2$.
   (a) Montrer que l'équation (E_n) admet dans $[1,+\infty[$ une unique solution, notée u_n.
   (b) Calculer $f_n(e)$. En déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in]1,e]$.
4. **Valeurs approchées obtenues par dichotomie**
   (a) On considère une fonction g continue et strictement monotone sur un intervalle $[a,b]$, qui s'annule en $\alpha \in]a,b[$. Écrire une fonction `dichotomie(g,a,b,eps)` renvoyant une valeur approchée à `eps` près de la racine α.
   (b) Définir une fonction `gn(n)` renvoyant la fonction $g_n : x \longmapsto f_n(x) - 2$ définie sur $[1,+\infty[$.
   (c) Définir une fonction `listeU(n,eps)` renvoyant une liste de valeurs approchées de u_k pour $k \in [\![2,n]\!]$, à la précision `eps`.
   (d) Proposer une fonction ou un script représentant de façon approchée les n premiers termes de la suite (u_n). Quelle conjecture peut-on formuler sur le comportement de la suite (u_n) ?
5. **Comportement de la suite (u_n)**
   (a) Montrer que : $\forall x \in]1,+\infty[,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0$.
   (b) En déduire la monotonie de (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) converge, et que sa limite ℓ vérifie : $\forall n \geqslant 2,\ 1 \leqslant \ell \leqslant u_n$.
6. **Détermination de la limite ℓ**
   On raisonne par l'absurde, en supposant que $\ell > 1$.
   (a) En utilisant (E_n), montrer que $({u_n}^n)$ converge vers $\dfrac{\ell^2-1}{\ln \ell}$.
   (b) Justifier d'autre part que : $\forall n \geqslant 2,\ {u_n}^n \geqslant \ell^n$, et conclure.

* * *