

I Définition et exemples

1. Axiomes des espaces vectoriels ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Vecteurs géométriques du plan ou de l'espace
3. L'ensemble $\mathbf{K}^n$ ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Autres exemples d'espaces vectoriels
5. Calculs dans un espace vectoriel ($\rightarrow$ *Annexe*)

II Sous-espaces vectoriels

1. Combinaisons linéaires de vecteurs
2. Définition d'un sous-espace vectoriel ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Exemples
4. Intersection de sous-espaces vectoriels ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Sous-espace vectoriel engendré ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Familles particulières de vecteurs

1. Famille génératrice ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Famille libre, famille liée ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Base ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Dimension

1. Espace vectoriel de base finie ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Cardinaux de familles libres, génératrices ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Dimension d'un sous-espace vectoriel
4. Rang d'une famille de vecteurs ($\rightarrow$ *Annexe*)

V Aspect matriciel dans $\mathbf{K}^n$

1. Matrice d'un vecteur relativement à une base
2. Rang d'une famille de vecteurs
3. Matrice d'une base ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Matrices de passage ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Changement de base ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

1.1 Axiomes des espaces vectoriels $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel si et seulement si :

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$

Propriétés de l'addition

- Associativité : $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Commutativité : $x + y = y + x$
- Élément neutre : $0_E + x = x + 0_E = x$
- Symétrique : $\exists(-x), (-x) + x = x + (-x) = 0_E$

$$\cdot : \mathbf{K} \times E \longrightarrow E$$

Propriétés du produit externe

- Élément neutre : $1.x = x$
- Distributivité 1 : $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
- Distributivité 2 : $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- Associativité : $(\lambda \mu).x = \lambda.(\mu.x)$

1.3 L'ensemble $\mathbf{K}^n$ des n -uplets sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{K}^n$.

On pose : $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, et pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda.x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

Alors $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

1.5 Calculs dans un espace vectoriel $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x, y \in E$

- $x - y = x + (-y)$
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
- $\lambda(-y) = -\lambda \cdot y$
- $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$
- $0 \cdot x = 0_E$
- $(-\mu) \cdot x = -\mu \cdot x$
- $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$
- $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

2.2 F sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\begin{cases} F \subset E, F \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F \end{cases}$

2.4 Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

2.5 Le sous-espace engendré par $P \subset E, P \neq \emptyset$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de P .

On le note : $\text{Vect}(P)$.

3.1 Famille génératrice : La famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E si et seulement si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

Tout vecteur de E est alors combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$. On dit aussi que $\mathcal{F}$ engendre E .

3.2 Liberté : La famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle de vecteurs de $\mathcal{F}$ est la combinaison linéaire triviale.

$\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ est libre $\Leftrightarrow \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^n, \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = 0$.

3.3 Base d'un espace vectoriel :

Une famille $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel E si et seulement si elle est libre et génératrice.

Conséquence : tout $x \in E$ s'écrit **de façon unique** comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E , alors : $\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème (admis) : Tout espace vectoriel non nul ($E \neq \{0_E\}$) possède au moins une base.

4.1 Espace vectoriel de base finie

Théorème : Si E possède une base finie, alors toutes les bases de E sont finies, de même cardinal $n \in \mathbf{N}^*$.

Dans ce cas, on appelle **dimension** de E le cardinal commun à toutes ses bases : $\dim(E) = n$.

4.2 Dans un espace vectoriel E de dimension finie n :

- toute famille génératrice est de cardinal $p \geq n$.
- toute famille génératrice de cardinal n est une base de E .
- toute famille libre est de cardinal $p \leq n$.
- toute famille libre de cardinal n est une base de E .

4.4 Rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E

Définition : le rang de $\mathcal{F}$ est la dimension de $\text{Vect}(\mathcal{F})$. On le note : $\text{rg}(\mathcal{F})$.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de cardinal p , de rang r dans un espace de dimension finie n . Alors :

- $r \leq n$, et $\mathcal{F}$ est génératrice $\Leftrightarrow r = n$. Dans ce cas, $p \geq n$.
- $r \leq p$ et $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow r = p$. Dans ce cas, $p \leq n$.
- $\mathcal{F}$ est une base $\Leftrightarrow r = p = n$.

5.3 Matrice d'une base Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{K}^n$.

Une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est une base de $\mathbf{K}^n$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

4.4 Matrices de passage Soient $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (u'_1, \dots, u'_n)$ deux bases de $\mathbf{K}^n$.

Alors la matrice $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u'_1, \dots, u'_n)$ est la **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$** .

On note $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Propriété : Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de $\mathbf{K}^n$.

Alors : $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$

4.5 Formule de changement de bases : $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbf{K}^n$. Soit $v \in \mathbf{K}^n$.

Soient $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $C' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$. Alors : $C = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times C'$