Corrigé du DM n°10

Distance entre deux droites non coplanaires

1. (a) Un système d'équations paramétriques de D_1 est : $\begin{cases} x-5=4\lambda \\ y-4=\lambda \\ z-3=\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}$.

   On cherche un point commun à D_1 et à D_2 : ce point correspond à une valeur du paramètre λ et ses coordonnées vérifient les équations cartésiennes définissant D_2.

   On a donc $\begin{cases} (5+4\lambda)-3(4+\lambda)-2(3+\lambda)+1=0 \\ (5+4\lambda)+5(4+\lambda)-2(3+\lambda)-7=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda=-12 \\ \lambda=-\frac{12}{7} \end{cases}$ ce qui est impossible.

   $\boxed{D_1 \text{ et } D_2 \text{ n'ont aucun point commun, elles ne sont donc pas sécantes.}}$

   (b) On pose $Q : x-3y-2z+1=0$ et $R : x+5y-2z-7=0$ les plans définissant D_2.
   Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}\,(1,-3,-2)$ et $\overrightarrow{n_2}\,(1,5,-2)$ sont donc normaux respectivement à Q et à R.
   Un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ normal à la fois à $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur-directeur de D_2.
   On pose $\overrightarrow{u_2}=(a,b,c)$. D'après la formule du produit scalaire en repère orthonormé, on obtient :
   $\begin{cases} a-3b-2c=0 \\ a+5b-2c=0 \end{cases}$. Par différence, $8b=0$, il reste $a=2c$. Posons $c=1$:

   $\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{u_2}=(2,0,1) \text{ dirige la droite } D_2.}$

   $\overrightarrow{u_1}\,(4,1,1)$ donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires : $\boxed{D_1 \text{ et } D_2 \text{ ne sont pas parallèles.}}$

2. (a) On cherche un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$ orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u_1}=(4,1,1)$ et à $\overrightarrow{u_2}=(2,0,1)$.

   On procède comme à la question précédente : $\overrightarrow{v}=(a',b',c')$ donc $\begin{cases} 4a'+b'+c'=0 \\ 2a'+c'=0 \end{cases}$

   On pose $a'=1$, on obtient alors $c'=-2$ puis $b'=-2$. $\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{v}\,(1,-2,-2) \text{ dirige } \Delta.}$

   (b) Soit A_1 le point d'intersection de D_1 et Δ.
   $A_1 \in D_1$ et $D_1 \subset P_1$ donc $A_1 \in P_1$.
   De plus, $\overrightarrow{v}$ est un vecteur-directeur de P_1, donc la droite passant par A_1 et dirigée par $\overrightarrow{v}$ est incluse dans P_1 : $\boxed{\Delta \subset P_1.}$

   (c) Par le même raisonnement, on prouve que $\Delta \subset P_2$.
   Pour conclure, il faut prouver que P_1 et P_2 sont sécants selon une droite (c'est-à-dire qu'ils ne sont pas parallèles). Il suffit pour cela de montrer que $\overrightarrow{u_2}$, qui dirige P_2, n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$.

   Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. On a : $\overrightarrow{u_2}=\lambda\overrightarrow{u_1}+\mu\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=4\lambda+\mu \\ 0=\lambda-2\mu \\ 1=\lambda-2\mu \end{cases}$ et on voit que les deux dernières équations sont incompatibles. Ainsi, $\overrightarrow{u_2}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$.
   P_1 et P_2 sont donc sécants selon une droite. Puisque $\Delta \subset P_1 \cap P_2$, on a : $\boxed{\Delta = P_1 \cap P_2.}$

3. (a) P_1 est dirigé par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$, et contient le point A donc $P_1 : \begin{cases} x-5=4\lambda+\mu \\ y-4=\lambda-2\mu \\ z-3=\lambda-2\mu \end{cases}, \lambda,\mu \in \mathbf{R}$

   On trouve une équation cartésienne de P_1 en faisant apparaître l'équation auxiliaire de ce système d'inconnues λ, μ. Sous forme matricielle :

   $$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & x-5 \\ 1 & -2 & y-4 \\ \boxed{1} & -2 & z-3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{9} & x-4z+7 \\ 0 & 0 & y-z-1 \\ \boxed{1} & -2 & z-3 \end{array}\right) \longleftarrow \textit{équation auxiliaire}$$

   On en déduit que $\boxed{P_1 : y-z-1=0}$

   Déterminons un point $B \in D_2$: on choisit $x_B=0$ et on résout $\begin{cases} -3y-2z+1=0 \\ 5y-2z-7=0 \end{cases}$.

   On trouve $B(0,1,-1)$. Le plan P_2 passe par B et est dirigé par $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{v}$.

Ainsi, $P_2 : \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y - 1 = -2\mu \\ z + 1 = \lambda - 2\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Même méthode que pour P_1 :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & -2 & y-1 \\ \boxed{1} & -2 & z+1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & x-2z-2 \\ 0 & \boxed{-2} & y-1 \\ \boxed{1} & -2 & z+1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x+\frac{5}{2}y-2z-\frac{9}{2} \\ 0 & \boxed{-2} & y-1 \\ \boxed{1} & -2 & z+1 \end{array}\right)$$

$x + \dfrac{5}{2}y - 2z - \dfrac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - 4z - 9 = 0$ donc $\boxed{P_2 : 2x + 5y - 4z - 9 = 0.}$

(b) Δ est dirigée par $\overrightarrow{v}\,(1,-2,-2)$ donc $\Delta : \begin{cases} x - x_0 = \lambda \\ y - y_0 = -2\lambda \\ z - z_0 = -2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbf{R}$

où (x_0, y_0, z_0) est un point quelconque de Δ.

Pour trouver un point de Δ, on peut utiliser les équations cartésiennes de P_1 et P_2, en posant par exemple $y = 0$: $\begin{cases} -z - 1 = 0 \\ 2x - 4z - 9 = 0 \end{cases}$ d'où : $x = \dfrac{5}{2}$ et $z = -1$.

En conclusion : $\boxed{\Delta : \begin{cases} x - \frac{5}{2} = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z + 1 = -2\lambda \end{cases} , \ \lambda \in \mathbf{R}.}$

(c) Soit $A_1(x,y,z) = \Delta \cap D_1$. Alors il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbf{R}$ tels que : $\begin{cases} x = 5 + 4\lambda = \frac{5}{2} + \lambda' \\ y = 4 + \lambda = -2\lambda' \\ z = 3 + \lambda = -1 - 2\lambda' \end{cases}$.

D'où le système : $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 2 & -4 \\ \boxed{1} & 2 & -4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & \frac{27}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & -4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & -4 \end{array}\right)$

On trouve donc $\lambda' = -\dfrac{3}{2}$, ce qui donne $\boxed{A_1\,(1,3,2).}$

Soit $A_2(x,y,z) = \Delta \cap D_2$: $A_2 \in \Delta$ donc $\exists \lambda \in \mathbf{R}$, $A_2\left(\dfrac{5}{2} + \lambda,\ -2\lambda,\ -1 - 2\lambda\right)$.

De plus, $A_2 \in D_2 = Q \cap R$ donc $\begin{cases} x - 3y - 2z + 1 = 0 \\ x + 5y - 2z - 7 = 0 \end{cases}$

On remplace : $\begin{cases} (\frac{5}{2} + \lambda) - 3(-2\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + 1 = 0 \\ (\frac{5}{2} + \lambda) + 5(-2\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) - 7 = 0 \end{cases}$

On résout n'importe laquelle de ces deux équations, on trouve $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{A_2\,(2,1,0).}$

(d) La distance entre les droites D_1 et D_2 est $d = A_1A_2 = \sqrt{(1-2)^2 + (3-1)^2 + (2-0)^2}$

$$d = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} \qquad \boxed{d = 3.}$$