

I Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. Cadre de l'étude
2. Définition et premières propriétés ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Traitement informatique ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Primitive d'une fonction f
5. Théorème fondamental de l'analyse ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. La notation dx

II Propriétés de l'intégrale

1. Convention sur les bornes ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Linéarité ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Croissance ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Inégalité triangulaire ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Valeur moyenne ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Fonction d'intégrale nulle

III Calcul intégral

1. Primitives usuelles ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Formules de composées ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Intégration par parties ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Changement de variables ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Fonctions définies par une intégrale

1. Domaine de définition
2. Dérivabilité ($\rightarrow$ *Annexe*)

V Application aux limites de sommes

VI Autres fonctions Riemann-intégrable

1. Fonctions en escalier
2. Fonctions prolongeables par continuité
3. Fonctions continues par morceaux
4. Exemples de fonctions non intégrables

Annexes

1.2 Intégrale comme limite de sommes : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Alors : $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$

Propriétés : $\int_a^a f = 0$ Relation de Chasles : $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$

1.3 Traitement informatique

```
def integrale(f,a,b,n) :
    ''' Renvoie une valeur approchée de l'intégrale de f entre a et b '''
    S = 0
    pas = (b-a)/n
    for k in range(n) : S += pas * f(a+k*pas)
    return S
```

1.5 Théorème fondamental :

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Alors $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

- Toute fonction f continue sur $[a, b]$ y admet des primitives.

L'ensemble des primitives de f sur $[a, b]$ est : $\left\{ x \mapsto \int_a^x f + \alpha, \alpha \in \mathbf{R} \right\}$.

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f .

2.1 Bornes d'une intégrale : $\int_b^a f = - \int_a^b f$. On se ramène toujours à : $a \leq b$.

2.2 Linéarité de l'intégrale : $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b])$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

2.3 Croissance de l'intégrale : $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$.

Encadrement : $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

2.4 Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

2.5a Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$

2.5b Théorème de la moyenne : $\exists c \in [a, b], \mu = f(c)$.

3.1 Primitives usuelles

$f(x) = \dots$	$F(x) = \dots$	$[a, b] \subset \dots$
$x^n, n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbf{R} \text{ si } n \geq 0 \\ \mathbf{R}_+^* \text{ ou } \mathbf{R}_-^* \text{ sinon} \end{cases}$
$x^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 0\}$	$\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$	$\begin{cases} \mathbf{R} \text{ si } n \geq 1 \text{ impair} \\ \mathbf{R}_+ \text{ si } n \geq 2 \text{ pair} \\ \mathbf{R}_+^* \text{ ou } \mathbf{R}_-^* \text{ si } n \leq -3 \text{ impair} \\ \mathbf{R}_+^* \text{ si } n \leq -2 \text{ pair} \end{cases}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbf{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbf{R}_+^* \text{ ou } \mathbf{R}_-^*$
e^x	e^x	$\mathbf{R}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\mathbf{R}_+^*$

$f(x) = \dots$	$F(x) = \dots$	$[a, b] \subset \dots$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan } x$	$\mathbf{R}$

3.2 Formules de composées : Soit u une fonction dérivable.

fonction	primitives
$u' u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$

fonction	primitives
$u' e^u$	$e^u + C$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\text{Arctan } u + C$

fonction	primitives
$u' \cos u$	$\sin u + C$
$u' \sin u$	$-\cos u + C$
$u' \tan u$	$-\ln \cos u + C$

3.3 Intégration par parties : $u, v \in \mathcal{C}^1([a, b])$: $\int_a^b u' v = [u v]_a^b - \int_a^b u v'.$

3.4 Changement de variables : $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ à valeurs dans $[c, d]$ et $f \in \mathcal{C}^0([c, d])$.

Alors : $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$

4.2 Dérivabilité de $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$, f continue entre $u(x)$ et $v(x)$.

F est dérivable en x si u et v sont dérivables en x . Dans ce cas : $F'(x) = v'(x) \times f \circ v(x) - u'(x) \times f \circ u(x).$

5. Sommes de Riemann : Soit f continue sur $[0, 1]$.

Alors : $\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$