Devoir Maison n°12

Espaces vectoriels

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1,0,0,1), \quad u_2 = (0,0,1,1), \quad u_3 = (0,1,0,-1) \quad \text{et} \quad u_4 = (1,-1,-1,1).$$

et les ensembles :

$$E = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) \quad \text{et} \quad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4, \ \ x = y\}.$$

1. (a) La famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est-elle une base de $\mathbf{R}^4$?
   (b) Déterminer une base de E ainsi que sa dimension comme sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
   (c) Déterminer une équation cartésienne caractérisant l'ensemble E.
   (d) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
   (e) Déterminer une base de F ainsi que sa dimension.

On pose dans $\mathbf{R}^4$: $v_1 = (1,1,0,0)$ et $v_2 = u_2$.

2. (a) Montrer que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de base (v_1,v_2).
   (b) Compléter (v_1,v_2) en une base (v_1,v_2,v_3) de E, de sorte que v_3 ait ses première et troisième coordonnées nulles.
   (c) Compléter (v_1,v_2) en une base (v_1,v_2,v_4) de F, de sorte que seule la troisième coordonnée de v_4 soit non nulle.
3. (a) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1,v_2,v_3,v_4)$ est une base de $\mathbf{R}^4$.
   (b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
   (c) Rappeler pourquoi P est inversible, et calculer P^{-1}.

On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^4$:

$$w_1 = (1,2,3,4) \quad \text{et} \quad w_2 = (2,0,-3,1)$$

On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(w_1,w_2)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w_1,w_2)$

4. (a) Donner la matrice M.
   (b) Quelle est la relation entre les matrices M, N et P ?
   (c) En déduire la matrice N.

* * *