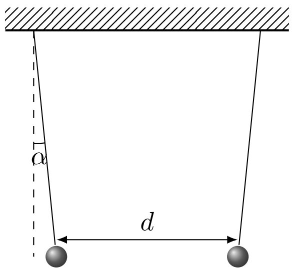
TD φ 10 – Dynamique du point

Relier cours et exercices

Capacités et compétences du cours ...	... à appliquer dans ...
▸ Établir un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte en représentant les forces associées sur une figure.	▸ Tous les exercices !
▸ Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement avec ou sans frottement.	▸ Exercices n° 3, 5, 6, 7, 9 et 10
▸ Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.	▸ Exercices n° 4 et 8
▸ Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique. Déterminer les expressions de la pulsation et de la période propres du mouvement.	▸ Exercices n° 6, 7 et 9

Savoir appliquer son cours

Exercice n° 1 : Charges et équilibre ★



Deux boules métalliques chacune de masse $m = 15\,\text{g}$, assimilées à des points matériels, sont électrisées et portent des charges opposées q et $-q$ ($q > 0$). Elles sont suspendues à des fils de même longueur, et on mesure alors la distance $d = 15\,\text{cm}$. L'angle des fils par rapport à la verticale est de $\alpha = 10°$.

1. Calculer la charge q ($\varepsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$).
2. Calculer la tension $||\vec{T}||$ d'un des deux fils.

Exercice n° 2 : Masse en équilibre ★

Un objet ponctuel de masse m est relié à deux ressorts de constantes de raideur respectives k_1 et k_2 et de longueurs à vide respectives $\ell_{0,1}$ et $\ell_{0,2}$. Les deux ressorts sont fixés sur deux supports éloignés d'une distance L, le tout faisant un angle α avec l'horizontale (l'objet repose sans frottement sur le support).
Déterminer la position de l'objet à l'équilibre.
Proposer plusieurs analyses de cas particuliers permettant de penser que le résultat que vous avez trouvé est correct.

Exercice n° 3 : Sédimentation d'une particule ★

Établir l'équation du mouvement d'une particule, de rayon r et de masse volumique ρ, lancée verticalement vers le bas avec la vitesse $v_0 > 0$ depuis l'origine d'un repère cartésien. La particule évolue dans l'eau, de masse volumique ρ_{eau}, et est supposée subir une force de frottement de Stokes opposée au mouvement et de norme $6\pi\eta r v$ avec la viscosité $\eta > 0$. Le vecteur vitesse atteint-il une limite ?

Exercice n° 4 : Solide en équilibre sur un plan incliné ★

Un objet de masse m est immobile sur un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale.

1. Représenter son vecteur poids, et donner ses coordonnées dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ dont le vecteur $\vec{u}_x$ est le long du plan incliné.
2. Représenter la force de liaison $\vec{R}$ avec le support, et déterminer sa décomposition normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.
3. Le solide se met à glisser lorsque $||\vec{T}|| = f||\vec{N}||$, avec $f = 0{,}35$. Pour quelle valeur de α l'objet se met-il en mouvement ?

Exercice n° 5 : Un peu de balistique ★

Un canon est placé au sommet d'une falaise dont l'altitude par rapport à la mer est notée h. Il se situe à la distance ℓ du bord de la falaise. Il peut propulser un boulet de masse m avec une vitesse initiale v_0, et en faisant un angle α par rapport à l'horizontale. L'accélération de la pesanteur est notée g. Un bateau circule à une distance D du bord de la falaise. Comment l'artificier doit-il choisir l'angle α pour atteindre le bateau lorsque ces deux points sont sur une droite orthogonale à la falaise ?

Données : $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $D = 100\,\text{m}$, $\ell = 100\,\text{m}$, $v_0 = 50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $h = 100\,\text{m}$.

Exercice n° 6 : Le ressort horizontal ★

Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k est posé sur un plan horizontal et peut glisser sans frottement. On note une extrémité O, fixée à un support. À l'autre extrémité est placé un objet M de masse m. Initialement, la longueur du ressort est ℓ_0 et on lance l'objet avec une vitesse v_0 de manière à comprimer le ressort.

1. Déterminer l'amplitude des oscillations $\ell_{\max} - \ell_0$.
2. Le ressort devient inélastique et se déforme si sa longueur devient plus petite que $\ell_0/2$. En déduire la vitesse initiale maximale $v_{0,\max}$ que l'on peut donner à l'objet.

Données : $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $v_0 = 1{,}0\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, $\ell_0 = 20\,\mathrm{cm}$ et $k = 10\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

Exercice n° 7 : Le ressort sur un plan incliné ★

Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k est posé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale et peut glisser sans frottement. On note l'extrémité supérieure O, fixée à un support. À l'autre extrémité est placé un objet M de masse m. Initialement, la longueur du ressort est $\ell_0/2$ et on lâche l'objet sans vitesse initiale. Déterminer le mouvement de l'objet. Calculer la période propre des oscillations.

Données : $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ rad, $\ell_0 = 20\,\mathrm{cm}$, $m = 10\,\mathrm{g}$ et $k = 10\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

S'entraîner

Exercice n° 8 : Cube sur un plateau ★★

Un cube posé sur un plateau horizontal subit une réaction $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ (composantes tangentielle et normale). Tant que $\left\|\vec{T}\right\| < f\left\|\vec{N}\right\|$ où f est le coefficient de frottement (positif), le cube ne peut pas glisser sur le plateau.

1. Le plateau est animé d'un mouvement vertical sinusoïdal tel que $z_{\mathrm{P}}(t) = a\cos(\omega t)$ et $x_{\mathrm{P}}(t) = 0$. Le cube est immobile sur le plateau. Déterminer $\vec{R}$ et les conditions sur ω pour que le cube ne décolle pas du plateau.
2. Le plateau se déplace maintenant horizontalement : $z_{\mathrm{P}}(t) = 0$ et $x_{\mathrm{P}}(t) = a\cos(\omega t)$. Déterminer $\vec{R}$ et les conditions sur ω pour que le cube ne glisse pas sur le plateau.

Exercice n° 9 : Densimètre à tube vibrant ★★★

De manière simplifié, un densimètre à tube vibrant est constitué d'un corps creux de volume intérieur V_0 et de masse m_0, rempli d'un fluide homogène de masse volumique inconnue ρ à déterminer. L'ensemble corps creux et liquide constitue le système étudié. Ce système $\mathscr{S}$, est suspendu à l'extrémité d'un ressort de coefficient de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, lui-même suspendu à une paroi fixe du référentiel du laboratoire, supposé galiléen ; le repère cartésien choisi est $(\mathrm{O}, \vec{u}_z)$.

Quand le système accroché au ressort est au repos, la longueur du ressort est alors égale à $\ell_{\text{éq}}$. La distance entre l'extrémité du ressort au centre d'inertie G du système est constante et notée D et on pose $z(t)$ la position de G.

1. Déterminer l'expression de la position $z_{\text{éq}}$ de G quand le système est à l'équilibre.
2. À $t = 0$, le ressort est écarté de sa position d'équilibre, sans vitesse initiale, soit $z_0 > z_{\text{éq}}$ la position initiale du centre d'inertie G. En posant $Z = z - z_{\text{éq}}$, déterminer l'équation différentielle satisfaite par la variable Z et en déduire la pulsation propre du mouvement ω_0.
3. Résoudre cette équation différentielle satisfaite par la variable $Z(t)$ et en déduire l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G en fonction de ω_0, $z_{\text{éq}}$ et z_0.
4. Montrer que la masse volumique ρ peut s'écrire :

$$\rho = \frac{1}{A}(T_0^2 - B)$$

où T_0 est la période d'oscillation du système telle que

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + \rho V_0}{k}}$$

et A et B, des constantes fonction de V_0, k et m_0.

Lors de l'étalonnage de l'appareil à une température de 288 K, on détermine la période d'oscillations du ressort T_0 dans le cas où le fluide est l'air puis l'eau : on obtient pour l'eau $\rho_{\text{air}} = 1{,}225\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ avec $T_{0,\text{air}} = 708{,}2\,\mathrm{\mu s}$ et pour l'eau $\rho_{\text{eau}} = 999{,}1\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ avec $T_{0,\text{eau}} = 975{,}6\,\mathrm{\mu s}$.

5. Déterminer les expressions et les valeurs des constantes A et B.
6. Pour un liquide inconnu, on obtient $T_0 = 926{,}0\,\mathrm{\mu s}$; quelle est sa masse volumique ?

Un sujet de concours

Exercice n° 10 : Jeux aquatiques [10] ★★★

Un baigneur (masse $m = 80\,\mathrm{kg}$) saute d'un plongeoir situé à une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$ au-dessus de la surface de l'eau. On considère qu'il se laisse chuter sans vitesse initiale et qu'il est uniquement soumis à la force de pesanteur (on prendra $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) durant la chute. On note (Oz), l'axe vertical descendant, O étant le point de saut.

1. Déterminer la vitesse v_e d'entrée dans l'eau ainsi que le temps de chute t_c.
2. Lorsqu'il est dans l'eau, le baigneur ne fait aucun mouvement. Il subit, en plus de la pesanteur :
   - une force de frottement $\vec{f}_f = -k\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant la vitesse et $k = 250\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) ;
   - la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\dfrac{m}{d_h}\vec{g}$ ($d_h = 0,9$ est la densité du corps humain).

   (a) Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse en projection sur (Oz), notée v_z. On posera $\tau = m/k$.

   (b) Intégrer cette équation en prenant comme nouvelle origine des temps $t = t_c$.

   (c) Déterminer la vitesse limite $v_L (< 0)$ en fonction de m, k, g et d_h.

   (d) Exprimer la vitesse v_z en fonction de v_e, $|v_L|$ et t. Déterminer à quel instant t_1 le baigneur commence à remonter.

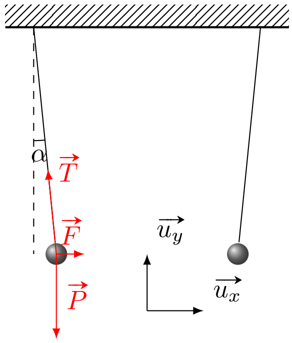
   (e) En prenant la surface de l'eau comme nouvelle origine de l'axe (Oz), exprimer $z(t)$. En déduire la profondeur maximale pouvant être atteinte.

   (f) En fait, il suffit que le baigneur arrive au fond de la piscine avec une vitesse de l'ordre de $v_2 = 1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ pour qu'il puisse se repousser avec ses pieds sans risque : à quel instant t_2 atteint-il cette vitesse et quelle est la profondeur minimale du bassin ?
3. Le même baigneur décide maintenant d'effectuer un plongeon. On suppose qu'il entre dans l'eau avec un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale et une vitesse $v_0 = 8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Les forces qui s'exercent sur lui sont les mêmes que précédemment mais le coefficient k est divisé par deux en raison d'une meilleure pénétration dans l'eau.
   On repère le mouvement par les axes (Ox) (axe horizontal de même sens que $\vec{v_0}$) et (Oz) (vertical descendant comme précédemment) ; le point O est le point de pénétration dans l'eau.
4. Déterminer les projections des équations du mouvement sur Ox et Oz.
5. En déduire les composantes de la vitesse dans l'eau en fonction du temps. Existe-t-il une vitesse limite ?
6. Le plongeur peut-il atteindre le fond de la piscine situé à $4\,\mathrm{m}$?

10.
1. Pour $z = h$, on trouve $t_c = \sqrt{2h/g} = 1{,}4\,\mathrm{s}$ et $v_e = \sqrt{2gh} = 14{,}1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$,
2c. $v_L = g\tau\left(1 - \dfrac{1}{d_h}\right) = -0{,}356\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$,
2d. $t_1 = \tau\ln\left(1 + \dfrac{v_e}{|v_L|}\right) = 1{,}19\,\mathrm{s}$ et $z_{\max} = 4{,}1\,\mathrm{m}$
2f. $t_2 = \tau\ln\left(\dfrac{v_e + |v_L|}{v_2 + |v_L|}\right) = 0{,}76\,\mathrm{s}$ et $z_2 = 3{,}94\,\mathrm{m}$.
3c. $t_3 = \tau\ln\left(1 + \dfrac{v_0\sin\alpha}{|v_L|}\right) = 1{,}52\,\mathrm{s}$ et $z_3 = 3{,}35\,\mathrm{m}$.

Corrections

Correction de l'exercice n° 1 « Charges et équilibre »:



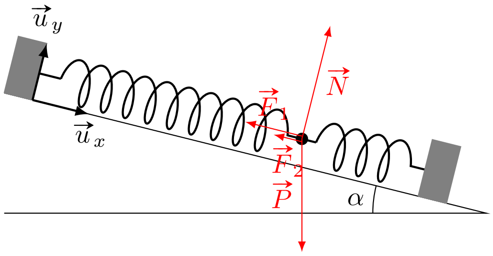
— Syst. : {bille}
— Réf. : terrestre supposé galiléen
— BDF :
  - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
  - la force électrostatique : $\vec{F} = \vec{F}_{2/1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{d^2}\vec{u}_x$
  - la tension du fil : $\vec{T} = -||\vec{T}||\sin\alpha\vec{u}_x + ||\vec{T}||\cos\alpha\vec{u}_y$

— P.I. : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$

En projetant sur les axes, on obtient :

$$\begin{cases}\text{selon } \vec{u}_x : \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{d^2} - ||\vec{T}||\sin\alpha = 0\\ \text{selon } \vec{u}_y : -mg + ||\vec{T}||\cos\alpha = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2d\sqrt{\pi\varepsilon_0||\vec{T}||\sin\alpha} = 2d\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg\tan\alpha}\\ ||\vec{T}|| = \dfrac{mg}{\cos\alpha}\end{cases}$$

Correction de l'exercice n° 2 « Masse en équilibre »:



— Syst. : {masse}
— Réf. : terrestre supposé galiléen
— BDF :
  - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\sin\alpha\vec{u}_x - mg\cos\alpha\vec{u}_y$
  - la force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_1 = -k_1(\ell_1 - \ell_{0,1})\vec{u_x}$
  - la force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_2 = +k_2(\ell_2 - \ell_{0,2})\vec{u_x}$
  - la réaction normale du support : $\vec{N} = ||\vec{N}||\vec{u_y}$

— P.I. : $\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N} = \vec{0}$

En projetant sur les axes, on obtient :

$$\begin{cases}\text{selon } \vec{u}_x : mg\sin\alpha - k_1(\ell_{1,\text{e}} - \ell_{0,1}) + k_2(\ell_{2,\text{e}} - \ell_{0,2}) = 0\\ \text{selon } \vec{u}_y : -mg\cos\alpha + ||\vec{N}|| = 0\end{cases}$$

En posant O, l'origine du repère au point d'accroche du ressort 1, on a donc $x_\text{e} = \ell_{1,\text{e}} = L - \ell_{2,\text{e}}$:

$$mg\sin\alpha - k_1(x_\text{e} - \ell_{0,1}) + k_2((L - x_\text{e}) - \ell_{0,2}) = 0 \Rightarrow x_\text{e} = \frac{mg\sin\alpha + k_1\ell_{0,1} + k_2(L - \ell_{0,2})}{k_1 + k_2}$$

Correction de l'exercice n° 3 « Sédimentation d'une particule »:

Considérons le système {particule} de masse m, de volume $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ et de masse volumique $\rho = m/V$, évoluant dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ supposé galiléen et muni d'un repère cartésien avec $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire de l'axe vertical ascendant.
Le système est soumis à 3 forces :

- son poids $m\vec{g} = -\dfrac{4}{3}\rho\pi r^3 g\vec{u}_z$;
- la poussée d'Archimède $-\rho_\text{eau}V\vec{g} = \dfrac{4}{3}\rho_\text{eau}\pi r^3 g\vec{u}_z$;
- la force de frottement de l'eau $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v} = 6\pi\eta r v\vec{u}_z$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système dans $\mathscr{R}$ galiléen s'écrit :

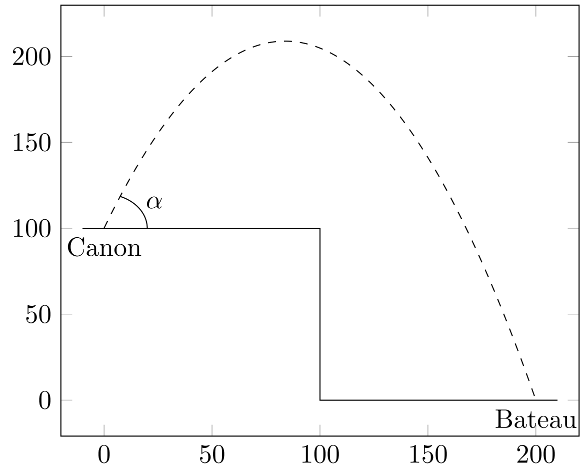
$$\frac{4}{3}\rho\pi r^3\frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = -6\pi\eta r\vec{v} + \frac{4}{3}\rho\pi r^3\vec{g} - \frac{4}{3}\rho_\text{eau}\pi r^3\vec{g} \iff \frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} + \frac{9\eta}{2\rho r^2}\vec{v} = \vec{g}\left(1 - \frac{\rho_\text{eau}}{\rho}\right)$$

Intégrons cette équation différentielle :

$$\vec{v} = \vec{A}e^{-9\eta t/2\rho r^2} + \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho_\text{eau})}{\eta}r^2\vec{g}$$

À l'aide des conditions initiales, $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = \vec{A} + \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho_{\text{eau}})}{\eta} r^2 \vec{g}$, on en déduit l'expression de la constante d'intégration vectorielle $\vec{A} = \vec{v}_0 - \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho_{\text{eau}})}{\eta} r^2 \vec{g}$, d'où $\vec{v} = \left[\vec{v}_0 - \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho_{\text{eau}})}{\eta} r^2 \vec{g}\right] e^{-9\eta t/2\rho r^2} + \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho_{\text{eau}})}{\eta} r^2 \vec{g}$.
Après un régime transitoire de durée $5 \times \frac{2\rho r^2}{9\eta}$, le système atteint une vitesse limite constante $\vec{v}_\infty = \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho_{\text{eau}})}{\eta} r^2 \vec{g}$.

Correction de l'exercice n° 5 « Un peu de balistique »:



— Syst. : {boulet}
— Réf. : terrestre supposé galiléen
— BDF :
  - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
— PFD : $\vec{P} = m\vec{a}$
— Projections :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t + h \end{cases}$$

Pour obtenir la trajectoire, il suffit de remplacer t par son expression en fonction de x :

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ y(x) = -\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \dfrac{x}{v_0\cos\alpha} + h \end{cases}$$

À noter que $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$, soit :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 (1 + \tan^2\alpha) + x\tan\alpha + h$$

On cherche alors l'angle α tel que $y(D+\ell) = 0$ et on obtient un polynôme du second degré en $\tan\alpha$:

$$0 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{D+\ell}{v_0}\right)^2 (\tan^2\alpha) + (D+\ell)\tan\alpha + h - \frac{1}{2}g\left(\frac{D+\ell}{v_0}\right)^2$$

Par résolution à la calculatrice, on trouve $\alpha = 68{,}93°$

Correction de l'exercice n° 8 « Cube sur un plateau »:

— Syst. : {cube}
— Réf. : terrestre supposé galiléen
— BDF :
  - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
  - la réaction du support : $\vec{R} = -||\vec{T}||\vec{u}_x + ||\vec{N}||\vec{u}_y$
— PFD : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}$

1. Le cube est sur le plateau, ainsi en l'assimilant à un point matériel, $z_p = z_c$ avec z_c la cote du cube. La condition de contact du cube sur le plateau est : $\vec{N} \neq \vec{0}$. En projetant le PFD sur l'axe vertical (ascendant) :

$$||\vec{N}|| - mg = m\ddot{z}_p \Rightarrow ||\vec{N}|| = m(g + \ddot{z}_p)$$

La condition de contact s'écrit alors :

$$\forall\, t, \quad ||\vec{N}|| = m(g + \ddot{z}_p) > 0$$

Donc :

$$g + \ddot{z}_p > 0 \Leftrightarrow g - a\omega^2\cos(\omega t) > 0$$

Or $g > 0$ et $-1 \leq \cos(\omega t) \leq 1$ donc pour que l'équation précédente soit vérifiée pour tout t, il faut que :

$$g - a\omega^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega < \sqrt{\frac{g}{a}}}$$

2. Le cube ne glisse pas sur le plateau, donc $\forall\ t$, $x_c = x_p$ avec x_c la position du cube. Ainsi l'accélération du plateau est égale à celle du cube. En projetant le PFD sur les axes :

$$\begin{cases} ||\vec{T}|| = m\ddot{x}_p \\ ||\vec{N}|| - mg = 0 \end{cases}$$

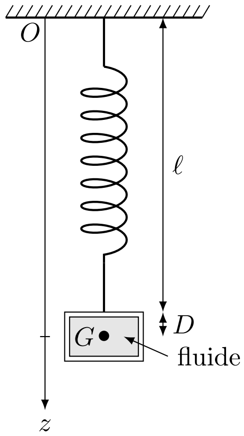
La condition de non-glissement est la suivante : $||\vec{T}|| < f||\vec{N}|| = fmg$. Ainsi :

$$\cancel{m}\ddot{x}_p < f\cancel{m}g \Leftrightarrow -a\omega^2\cos(\omega t) < fg$$

Cette relation est vraie pour tout t à condition que :

$$a\omega^2 < fg \Rightarrow \boxed{\omega < \sqrt{\frac{fg}{a}}}$$

☺ Correction de l'exercice n° 9 « Densimètre à tube vibrant »:



En prenant l'axe descendant, $z = \ell + D$:
- Système : {corps creux + fluide}
- Référentiel : terrestre supposé galiléen
- BDF :
  - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = (m_0 + \rho V_0)g\vec{u}_z$
  - la force de rappel : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$

1. À l'équilibre :

$$mg - k(z_{\text{éq}} - D - \ell_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{\text{éq}} = \ell_0 + D + \frac{mg}{k}}$$

2. Appliquons le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe z avec $m = m_0 + \rho V_0$:

$$mg - k(z - D - \ell_0) = m\ddot{z} \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}D + \ell_0 = \frac{k}{m}z_{\text{éq}}$$

En posant $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Z = z - z_{\text{éq}}$, on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique unidirectionnel :

$$\boxed{\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0}$$

3. La solution générale de l'équation différentielle précédente :

$$Z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Donc :

$$\begin{cases} z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_{\text{éq}} \\ \dot{z}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

Or $z(t = 0) = z_0$ et $\dot{z}(t = 0) = 0$, donc :

$$\begin{cases} z(t = 0) = z_0 = A + z_{\text{éq}} \\ \dot{z}(t = 0) = 0 = B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = z_0 - z_{\text{éq}} \\ B = 0 \end{cases}$$

Finalement : $\boxed{z(t) = (z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t) + z_{\text{éq}}}$

4. D'après la question 2. :

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m_0 + \rho V_0}}$$

Donc :

$$\rho = \frac{k}{4V_0\pi^2}\left(T_0^2 - \frac{4\pi^2 m_0}{k}\right)$$

On retrouve l'expression donnée en posant $A = \dfrac{4V_0\pi^2}{k}$ et $B = \dfrac{4\pi^2 m_0}{k}$.

5. Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} \rho_{\text{eau}} = \dfrac{1}{A}(T_{0,\text{eau}}^2 - B) \\ \rho_{\text{air}} = \dfrac{1}{A}(T_{0,\text{air}}^2 - B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{T_{0,\text{air}}^2 - T_{0,\text{eau}}^2}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{eau}}} = 4{,}51\,\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \\ B = \dfrac{\rho_{\text{air}} T_{0,\text{eau}}^2 - \rho_{\text{eau}} T_{0,\text{air}}^2}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{eau}}} = 5{,}01 \times 10^{-7}\,\text{s}^{-2} \end{cases}$$

6. Application numérique :

$$\rho_{\text{inconnue}} = 790\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Il s'agit de l'éthanol.

☺ Correction de l'exercice n° 10 « Jeux aquatiques »:

On considère :

- Système : {le plongeur} assimilé à son centre de gravité M de masse m
- Référentiel : terrestre supposé galiléen sur toute la durée de l'expérience

1. La première partie du mouvement correspond à une chute libre :
   - BDF :
     - son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$
   - PFD : l'application du principe fondamental de la dynamique donne :

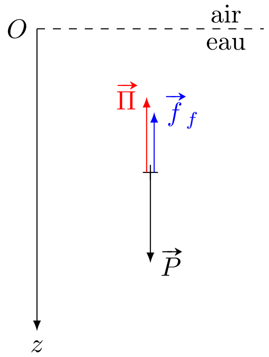
$$\cancel{m}\vec{a} = \cancel{m}\vec{g} \overset{\text{proj.}\vec{u}_z}{\Rightarrow} \ddot{z} = g$$

   - Intégration avec $\dot{z}(t=0) = 0$ et $z(t=0) = 0$:

$$\dot{z}(t) = gt \text{ et } z(t) = \frac{gt^2}{2}$$

   Pour $z = h$, on trouve $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \overset{\text{A.N.}}{=} 1{,}4\,\text{s}$ et $v_e = \sqrt{2gh} \overset{\text{A.N.}}{=} 14{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. Désormais le plongeur est dans l'eau :
   (a) Schéma de la situation :



   - PFD : l'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{\Pi} + \vec{f}_f$$

   - Projection sur (Oz) : en posant $v_z = \dot{z}$:

$$m\dot{v}_z = mg\left(1 - \frac{1}{d_h}\right) - kv_z \Rightarrow \boxed{\dot{v}_z + \frac{v_z}{\tau} = g\left(1 - \frac{1}{d_h}\right)}$$

   avec $\tau = m/k$

   (b) La solution générale de l'équation différentielle précédente à laquelle obéit la vitesse en projection sur (Oz) :

$$v_z = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + g\tau\left(1 - \frac{1}{d_h}\right)$$

   En prenant $v(t=0) = v_e$ (en prenant t_c comme nouvelle origine des temps) :

$$\boxed{v_z(t) = g\tau\left(1 - \frac{1}{d_h}\right) + \left(v_e - g\tau\left(1 - \frac{1}{d_h}\right)\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

   (c) Lorsque t tend vers ∞, on trouve la vitesse limite, soit :

$$\boxed{v_L = g\tau\left(1 - \frac{1}{d_h}\right) \Rightarrow v_L \overset{\text{A.N.}}{=} -0{,}356\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

   $v_L < 0$ car le plongeur finit par remonter (la résultante des forces est vers le haut).

   (d) On obtient directement :

$$v_z(t) = (v_e + |v_L|)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - |v_L|$$

   Le plongeur commence à remonter lorsque la vitesse v_z devient nulle, puisque la résultante des forces est vers le haut :

$$v_z(t_1) = 0 \Leftrightarrow (v_e + |v_L|)\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = |v_L| \Rightarrow \boxed{t_1 = \tau\ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right) \overset{\text{A.N.}}{=} 1{,}19\,\text{s}}$$

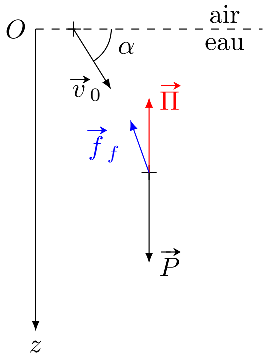
   (e) En intégrant la vitesse, avec $z(t=0) = 0$ (prenant la surface de l'eau comme nouvelle origine de l'axe (Oz)), on trouve :

$$z(t) = \tau(v_e + |v_L|)\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) - |v_L|t$$

   La profondeur maximale est atteinte à $t = t_1$:

$$\boxed{z_{\max} = z(t_1) \overset{\text{A.N.}}{=} 4{,}1\,\text{m}}$$

3. Les forces sont le même que précédemment, seules les conditions initiales changent :



4. Les projections des forces sont les suivantes :
   - BDF :
     - son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$
     - une force de frottement $\vec{f}_f = -\frac{k}{2}\vec{v} = -\frac{k}{2}\dot{x}\vec{u}_x - \frac{k}{2}\dot{z}\vec{u}_z$
     - la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\frac{m}{d_h}\vec{g} = -\frac{m}{d_h}g\vec{u}_z$
   - PFD : l'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}_f + \vec{\Pi} \overset{\text{proj.}}{\Rightarrow} \begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{k}{2}\dot{x} \\ m\ddot{z} = mg\left(1 - \frac{1}{d_h}\right) - \frac{k}{2}\dot{z} \end{cases}$$

5. Par intégration :
   - Intégration :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \dot{z}(t) = B\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + g\tau\left(1 - \frac{1}{d_h}\right) \end{cases}$$

   avec $\tau = \frac{2m}{k}$
   - Conditions initiales : avec $\dot{x}(t=0) = v_0\cos\alpha$ et $\dot{z}(t=0) = v_0\sin\alpha$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0\cos\alpha\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \dot{z}(t) = \left(v_0\sin\alpha - g\tau\left(1 - \frac{1}{d_h}\right)\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + g\tau\left(1 - \frac{1}{d_h}\right) \end{cases}$$

   La vitesse limite est obtenue en regardant la limite à l'infini. On trouve une vitesse verticale limite d'expression semblable à la précédente. On peut réécrire v_z comme précédemment en substituant v_e par $v_0\sin\alpha$. On obtient :

$$\boxed{v_L = g\tau\left(1 - \frac{1}{d_h}\right) \overset{\text{A.N.}}{=} -0{,}71\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

6. Les expressions obtenues précédemment sont utilisables en remplaçant v_e par $v_0\sin\alpha$, la vitesse s'annule donc à l'instant :

$$\boxed{t_3 = \tau\ln\left(1 + \frac{v_0\sin\alpha}{|v_L|}\right) \overset{\text{A.N.}}{=} 1{,}52\,\mathrm{s}}$$

   à la profondeur :

$$\boxed{z(t_3) = \tau(v_0\sin\alpha + |v_L|)\left(1 - \exp\left(-\frac{t_3}{\tau}\right)\right) - |v_L|t_3 \overset{\text{A.N.}}{=} 3{,}35\,\mathrm{m}}$$

   Le plongeur n'atteint pas le fond.