

I Rappels et compléments

1. Dérivée en x_0 , dérivée à droite, à gauche ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Lien avec la continuité ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Fonction dérivée, notations
4. Lien avec les tangentes ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Cas de non dérivabilité

II Opérations sur les fonctions dérivables

1. Somme ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Produit externe ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Produit ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Inverse, quotient ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Composée ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Réciproque ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Dérivées usuelles

1. Formulaire des fonctions usuelles ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Formulaire des composées ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Dérivées d'ordres supérieurs

1. Fonction n fois dérivable
2. Classes de fonctions
3. Cas des fonctions usuelles

V Théorème de Rolle et applications

1. Extremum relatif ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Théorème de Rolle ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Théorème des accroissements finis (TAF) ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Inégalité des accroissements finis (IAF) ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Variations des fonctions dérivables ($\rightarrow$ *Annexe*)

VI Généralisation du TAF

1. Théorème de Taylor-Lagrange ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Application aux fonctions exp, cos, sin ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

1.1 Définition du nombre dérivé en x_0 : $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

1.2 Lien avec la continuité :

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 et $f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x_0) + h.f'(x_0) + o(h)$.

1.4 Équations des tangentes : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

2. Opérations sur les fonctions dérivables :

* u, v sont deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Alors $u + v$, λu , $u \times v$ et (si v ne s'annule pas) $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I , avec :

$$(u + v)' = u' + v' \quad (\lambda u)' = \lambda u' \quad (u \times v)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

* Si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbf{R}$ sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

* Si $f : I \rightarrow J$ est dérivable et bijective, de bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$, si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

3. Dérivées usuelles : **Voir Chapitre 2**

Nouvelle fonction usuelle : Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

Si u est dérivable, alors $\text{Arctan}(u)$ est dérivable et : $(\text{Arctan}(u))' = \frac{u'}{1 + u^2}$.

5.1 Extremum relatif : Si f est dérivable en x_0 et admet en x_0 un extremum relatif, alors $f'(x_0) = 0$.

5.2 Théorème de Rolle : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

5.3 TAF : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a).f'(c)$

5.4 IAF : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

On suppose que $|f'|$ est bornée sur $]a, b[$ et on pose $M = \sup_{x \in]a, b[} |f'(x)|$.

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq M.|b - a|$

5.5 Variations d'une fonction dérivable : Soit f dérivable sur un intervalle réel I .

- f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- Si f' est positive sur I , et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est négative sur I , et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I .

6.1 Théorème de Taylor-Lagrange : $f \in \mathcal{C}^n([a, b]) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a, b[)$.

Alors : $\exists c \in]a, b[$, $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

6.2 Développements de $e^x, \cos(x), \sin(x)$: $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \cos x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$