DS n°6, mathématique

Durée : 3 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation. L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 feuille recto/verso, et est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Espaces vectoriels *(6 points)*

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère l'ensemble $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4,\ x+3y+2z-t=0\right\}$.

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
   (b) Donner une base $\mathcal{B}$ de F, et préciser la dimension de F.
   (c) *Informatique* : Un vecteur $u=(x,y,z,t)$ de $\mathbf{R}^4$ est représenté par la liste $u=[x,y,z,t]$.
   Écrire une fonction `appartient(u)` renvoyant `True` si $u \in F$, et `False` sinon.
2. On note $\mathcal{C}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Soit $\mathcal{B}' = \{e_1\} \cup \mathcal{B}$.
   Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{C}$.
   (a) Déterminer la matrice P.
   (b) Déterminer le rang de P.
   (c) Que peut-on en déduire pour la matrice P, et pour la famille $\mathcal{B}'$?
3. Soient g_1, g_2, g_3 les vecteurs de $\mathbf{R}^4$ définis par :
   $$g_1=(1,-1,0,1),\quad g_2=(0,1,2,1),\quad g_3=(-2,3,2,-1).$$
   On note $G = \mathrm{Vect}(g_1,g_2,g_3)$.
   (a) Déterminer une base de G, et préciser sa dimension.
   (b) Déterminer un système d'équations cartésiennes de G.
   On rappelle qu'une équation cartésienne porte uniquement sur les coordonnées x,y,z,t.
4. Soit $H = F \cap G$.
   (a) Que peut-on dire de H ?
   (b) Quelles sont les dimensions possibles pour H ?
   (c) Déterminer un vecteur non nul h tel que : $h \in H$.
   (d) Montrer que : $H = \mathrm{Vect}(h)$.

Exercice 2 : Équation trigonométrique *(6 points)*

On pose : $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Étudier la parité de f.
3. (a) Rappeler les équivalents usuels en 0 de $\sin(x)$ et de $\cos(x)-1$.
   (b) En déduire la limite de f en 0.
   (c) Déterminer un prolongement continu $\tilde{f}$ de f en 0.
4. Montrer que f est dérivable sur D_f et que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{(1-\cos x)(x-\sin x)}{x^2\sin^2(x)}$.
5. (a) Montrer que : $\forall x>0,\ x-\sin(x)>0$.
   (b) Étudier la limite de f en π par valeurs inférieures (à gauche).
   (c) En déduire que $\tilde{f}$ réalise une bijection de $[0,\pi[$ vers un intervalle J à préciser.
6. **Informatique** : soit $y \in J$. On s'intéresse à l'équation $\tilde{f}(x)=y$ d'inconnue $x \in [0,\pi[$.
   (a) Définir en langage *Python* la fonction $\tilde{f}$.
   On prendra soin d'effectuer les importations nécessaires, et de distinguer les cas $x=0$ et $x \neq 0$.
   (b) Dans cette question, on cherche à déterminer informatiquement un réel $b \in [0,\pi[$ tel que $\tilde{f}(b) \geqslant y$.
   • Expliquer pourquoi un tel réel b existe, quel que soit $y \in J$ fixé à l'avance.
   • Écrire une fonction `borne(y)` renvoyant un réel $b \in [0,\pi[$ tel que $\tilde{f}(b) \geqslant y$.
   <u>*Indication*</u> *: on pourra initialiser* `b=0` *et tant que $\tilde{f}(b) < y$ redéfinir b comme le milieu de l'intervalle $[b,\pi]$.*
   (c) En déduire une fonction `dichotomie(y,`ε`)` utilisant les fonctions précédentes et renvoyant une valeur approchée à ε près de la solution $x \in [0,\pi[$ de l'équation $\tilde{f}(x)-y=0$.

Problème : Suites de racines *(9 points)*

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ un paramètre, on s'intéresse aux solutions réelles x de l'équation :

$$x^3 - n(x-3)^2 = 0 \qquad (E_n)$$

dont on étudiera le comportement lorsque n tend vers $+\infty$.

1. **Existence de solutions** : pour tout réel x, on pose : $\varphi_n(x) = x^3 - n(x-3)^2$.
   (a) Étudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction φ_n.
   (b) Montrer que φ_n est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
   (c) Que peut-on en déduire pour l'équation (E_n) ?
2. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad f(x) = \dfrac{x-3}{x^{3/2}}$.
   (a) Donner les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
   (b) Donner l'équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 3.
   (c) Justifier que : $f(x) - \dfrac{x-3}{3^{3/2}} \underset{x\to 3}{\sim} -\dfrac{(x-3)^2}{2\times 3^{3/2}}$.

   <u>*Indication*</u> *: On pourra poser $h = x-3$ et utiliser la formule d'équivalent en 0 de $u \mapsto (1+u)^{-3/2} - 1$.*

   (d) Justifier que f est dérivable et que $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \quad f'(x) = \dfrac{9-x}{2\times x^{5/2}}$.
   (e) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbf{R}_+^\star$. Donner une valeur simplifiée de l'extremum de f, indiquer les limites trouvées précédemment et préciser la valeur de f en 3.
3. **Nombre de solutions de** (E_n)
   Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $x_n \in \mathbf{R}$ une solution de (E_n).
   (a) Montrer que : $x_n > 0$.
   (b) En déduire que : $f(x_n) = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ou $f(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   (c) Montrer que : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{2}{9} \Leftrightarrow n \leqslant 20$.
   (d) On suppose ici que $n \leqslant 20$. Donner en justifiant le nombre de solutions réelles de (E_n).
   (e) On suppose maintenant que $n > 20$.
   Soit g la restriction de f à $]0,9]$: $\mathcal{D}_g =]0,9]$ et $\forall x \in]0,9]$, $g(x) = f(x)$.
   Soit h la restriction de f à $[9,+\infty[$: $\mathcal{D}_h = [9,+\infty[$ et $\forall x \in [9,+\infty[$, $h(x) = f(x)$.
   Montrer que g et h sont des bijections, et en déduire que (E_n) admet exactement 3 solutions réelles distinctes a_n, b_n et c_n qui vérifient : $0 < a_n < 3 < b_n < 9 < c_n$.
4. **Équivalents des solutions quand** $n > 20$**.**
   Dans toute la fin de l'exercice on suppose $n > 20$.
   (a) Déterminer le sens de variations des suites $(a_n)_{n>20}$ et $(b_n)_{n>20}$ ainsi que leur limite en $+\infty$.
   (b) En utilisant la question **2b**, montrer que $f(b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b_n - 3}{3^{3/2}}$, et en déduire l'équivalent de $b_n - 3$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) En utilisant la question **2c**, montrer que : $b_n - 3 - \dfrac{3^{3/2}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{27}{2n}$.
   (d) Montrer que la suite $(c_n)_{n>20}$ est strictement croissante et donner sa limite.
   (e) Montrer que $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

FIN DU SUJET