TD φ 11 : Statique des fluides

Relier cours et exercices

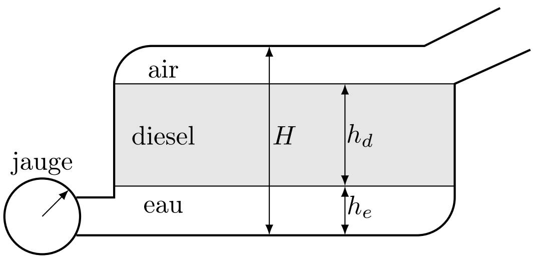
Capacités et compétences du cours ...	... à appliquer dans ...
▸ Établir l'expression de la pression avec la profondeur dans le cas d'un fluide incompressible.	▸ Exercices n° 1, 2, 3, 9
▸ Établir l'expression de la pression en fonction de l'altitude dans le cas de l'atmosphère dans le modèle du gaz parfait.	▸ Exercices n° 5 et 6
▸ Déterminer l'expression ou la valeur de la résultante des forces de pression.	▸ Exercices n° 7 et 8
▸ Interpréter la flottabilité d'une particule de fluide à l'aide des projections verticales du poids et de la poussée d'Archimède.	▸ Exercices n° 4 et 5

Savoir appliquer son cours

Exercice n° 1 : Expérience du crève-tonneau de Pascal ★

Pascal élabora l'expérience suivante afin de montrer que l'on pouvait crever un tonneau plein grâce à une faible masse d'eau. Au dessus d'un tonneau rempli à ras bord, il ajoute un tube fin dont l'aire de la section est $S = 1\,\text{cm}^2$. Il verse dans le tube de l'eau. Lorsque la pression dans le tonneau dépasse 2 atm, les forces pressantes qui s'exercent sur les parois du tonneau le font commencer à fuir puis se crève. Calculer la masse d'eau minimale m_{min} à ajouter pour crever le tonneau.

Exercice n° 2 : De l'eau dans le diesel ★



Le principal danger, pour les nouveaux moteurs diesel (HDI,TDI ...), est une forte présence d'eau dans le carburant.

L'indication de remplissage d'un réservoir de carburant est proportionnelle à la pression mesurée par une jauge placée au fond du réservoir. L'eau, de densité plus élevée que le diesel, vient se loger au fond du réservoir, faussant ainsi la mesure prise par la jauge. Le réservoir possède une hauteur totale H.

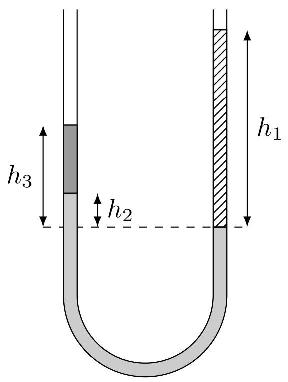
On note ρ_e la masse volumique de l'eau, ρ_d la masse volumique du diesel, g l'accélération de pesanteur et p_a la pression atmosphérique.

1. Déterminer la pression p_{max} indiquée par la jauge lorsque le réservoir est rempli uniquement de diesel en fonction de p_a , ρ_d , g et H.
2. Le réservoir contient maintenant de l'eau sur une hauteur h_e, déterminer en fonction de ρ_e, ρ_d , h_e et H quelle est la hauteur h_d de diesel pour laquelle la jauge indique le plein du réservoir.
3. Application numérique : calculer le taux de remplissage $\tau = 100\dfrac{h_d}{H}$ pour $H = 250\,\text{mm}$, $h_e = 18\,\text{mm}$, $\rho_e = 1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\rho_d = 846\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Exercice n° 3 : Mesure de la masse volumique de l'éthanol ★

Un tube en U est rempli de mercure, de masse volumique ρ_2. Dans une des parties verticales, on introduit sur une hauteur h_1 de l'eau (non miscible au mercure), et de masse volumique $\rho_1 < \rho_2$. Dans l'autre partie verticale, on introduit de l'éthanol (tout aussi peu miscible au mercure) sur une hauteur $h_3 - h_2$. On mesure expérimentalement les hauteurs h_1, h_2 et h_3. Calculer la masse volumique ρ_3 de l'éthanol en fonction des données de l'énoncé.

<u>**Données**</u> **:** $\rho_1 = 1{,}00\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, $\rho_2 = 13{,}55\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, $h_1 = 80{,}0\,\text{cm}$, $h_2 = 5{,}00\,\text{cm}$ et $h_3 = 20{,}0\,\text{cm}$.



Exercice n° 4 : Solide en équilibre entre deux liquides ★

Une éprouvette graduée contient deux liquides non miscibles 1 et 2 de masses volumiques $\rho_1 = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et $\rho_2 = 1{,}372 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. On fait tomber un solide cylindrique (section S, hauteur h) de masse volumique ρ_s dans l'éprouvette : il vient se placer à l'équilibre entre les deux phases.

Le niveau du liquide 2 est alors déplacé de 80 divisions, tandis que celui du liquide 1 est déplacé de 120 divisions.

1. Calculer ρ_s du solide.
2. On déplace légèrement le solide d'une profondeur a par rapport à sa position équilibre et on le relâche sans vitesse initiale. Montrer que le solide oscille au sein du système liquide et déterminer la période de ses oscillations.

Exercice n° 5 : Modèle de troposphère et ascension d'un ballon-sonde ★★

Dans la troposphère (partie de l'atmosphère comprise entre 0 et 11 000 m d'altitude), la température est une fonction affine de l'altitude z : $T = T_0 - kz$ avec $k = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot m^{-1}}$. Les conditions au sol sont $T_0 = 293\,\mathrm{K}$ et $P_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

1. Établir la loi de variation de la pression P en fonction de l'altitude. Calculer la pression de la troposphère pour à l'altitude $z = 4000\,\mathrm{m}$.
2. Exprimer la loi de variation de la masse volumique ρ de la troposphère en fonction de z. On calculera ρ_0, masse volumique de l'air au niveau du sol terrestre et la masse volumique $\rho(z)$ à l'altitude $z = 4000\,\mathrm{m}$.
3. Un ballon-sonde sphérique de volume maximal $V_m = 250\,\mathrm{m^3}$ est incomplètement gonflé à l'hélium (gaz de densité $d = 0{,}138$) jusqu'à $V_0 = 180\,\mathrm{m^3}$ au niveau du sol. La masse du ballon et de la structure est $m = 120\,\mathrm{kg}$. Exprimer la force ascensionnelle du ballon et en déduire l'altitude maximale atteinte. Quelle est alors la surpression de l'hélium par rapport à l'air extérieur ?

Données : $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $R = 8{,}31\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$; $M_{\mathrm{air}} = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

L'air et l'hélium seront tous les deux considérés comme des gaz parfaits.

S'entraîner

Exercice n° 6 : Building 101 ★★★

On se propose de déterminer la hauteur du building 'Yi-Ling-Yi' (101) situé à Taïpeh, capitale de Taïwan.

Partie I. On assimile localement l'air à un gaz parfait isotherme à la température T_0.

1. Quelle est l'expression de la masse volumique ρ en fonction de la masse molaire de l'air M, de la pression p, de la constante des gaz parfaits R et de la température T_0 ?
2. La masse molaire de l'air est $M = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. Justifier ce nombre.
3. En intégrant l'équation différentielle obtenue, déterminer l'expression littérale de la pression en fonction de l'altitude z, de M, g, R, T_0 et p_0 (pression atmosphérique au niveau du sol), en admettant que g reste constant dans l'atmosphère.
4. Le baromètre indique une pression de $p_0 = 1{,}01\,\mathrm{bar}$ au niveau du sol et $p = 953\,\mathrm{mbar}$ en haut de la tour.
   (a) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, déterminer la valeur de H. On rappelle que : $e^x \simeq 1 + x$ au voisinage de 0.
   (b) Avec un raisonnement analogue, justifier l'hypothèse « g constant ».

Données : $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $R = 8{,}31$ S.I, $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ et $R_T = 6{,}30 \times 10^3\,\mathrm{km}$.

Partie II. En réalité, le modèle de l'atmosphère isotherme n'est pas satisfaisant, il faut donc tenir compte de la variation de la température en fonction de l'altitude. Dans la troposphère ($0 < z < 11\,\mathrm{km}$), la température varie avec l'altitude selon la relation :

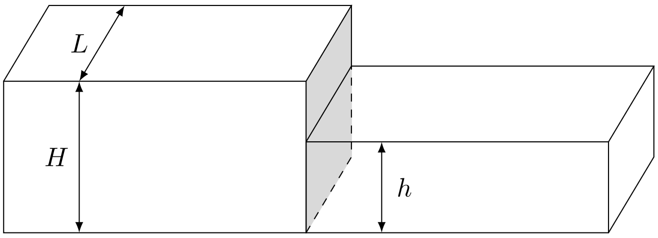
$$T = T_0 - \lambda z$$

avec $\lambda = 6{,}50\,\mathrm{K \cdot km^{-1}}$.

5. Vérifier la pertinence de cette correction.
6. (a) Intégrer la nouvelle équation différentielle obtenue en tenant compte de la variation de la température avec l'altitude.
   (b) En déduire la nouvelle valeur prise par H. Qu'en concluez-vous ?

Exercice n° 7 : Écluse ★★

Une porte de l'écluse de largeur L et de hauteur H est située dans le plan $y\mathrm{O}z$. Cette porte subit l'action de l'eau d'un canal : d'un côté la hauteur d'eau est H et de l'autre h.



Exprimer, puis calculer numériquement, la résultante des forces de pression s'exerçant sur cette porte.

Données : $H = 4\,\mathrm{m}$; $h = 2\,\mathrm{m}$; $L = 3\,\mathrm{m}$; $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $\rho_{\mathrm{eau}} = 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Exercice n° 8 : Force de pression sur un barrage plan ★★★

Le lac de Serre-Ponçon, dans les Hautes-Alpes, est un lac artificiel généré suite à la création d'un barrage, en 1959, sur la Durance. La Figure 1 présente la géométrie du problème.

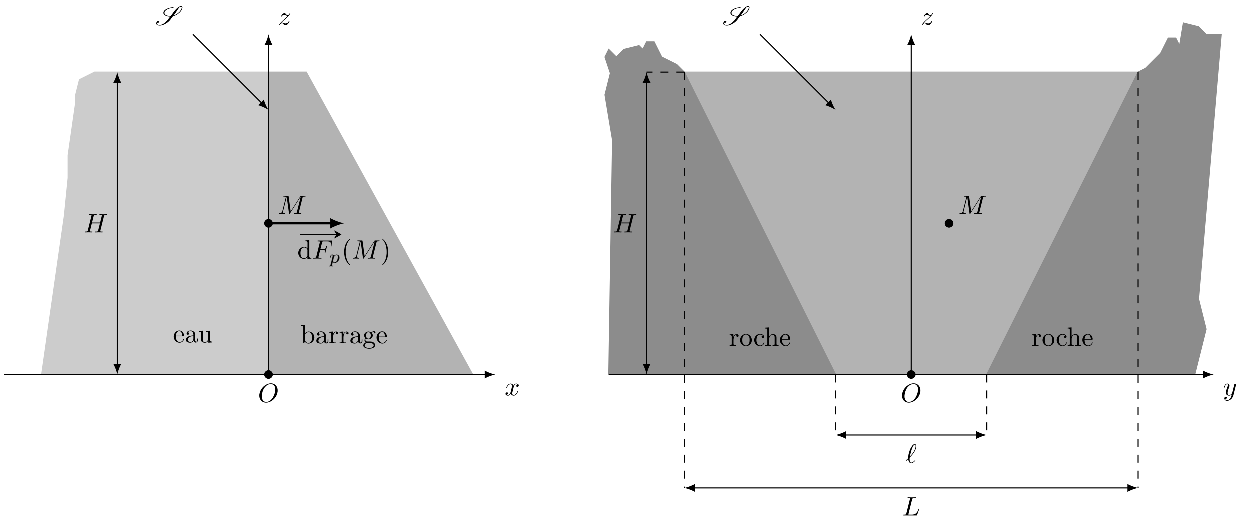


Figure 1. Barrage plan : vue de profil (à gauche) et vue de face (à droite)

Calculer la force exercée par l'eau du lac de montagnes sur le barrage, en considérant qu'elle est exercée sur la surface plane, $\mathscr{S}$, verticale du barrage qui a la forme d'un trapèze de hauteur H, large en pied de ℓ et en crête de L.

Données : $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $H = 90\,\mathrm{m}$, $\ell = 125\,\mathrm{m}$ et $L = 600\,\mathrm{m}$.

Exercice n° 9 : Au centre de la Terre ... ★★★

Pour évaluer un ordre de grandeur de la pression au centre de la Terre, on adopte le modèle très simple suivant : la Terre de masse M_{T} est constituée d'un fluide homogène de masse volumique ρ_0 uniforme occupant une sphère de centre O et de rayon R_{T}. Le champ de gravitation en un point M à l'intérieur de la Terre, situé à la distance r du centre O, est $\vec{\mathscr{G}}(\mathrm{M}) = -\dfrac{GM_{\mathrm{T}}r}{R_{\mathrm{T}}^3}\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire dirigé du centre vers l'extérieur.

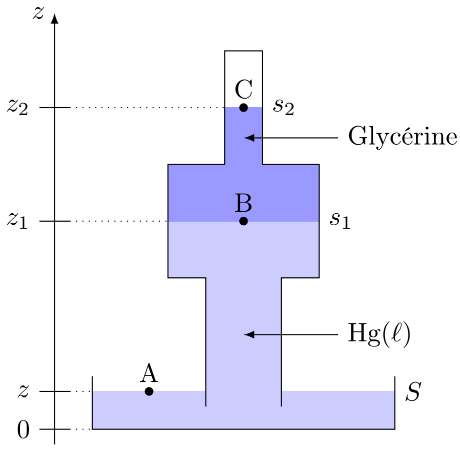
Déterminer le champ de pression dans le cadre de ce modèle et en déduire la pression au centre, comparer à la valeur communément admise de $3{,}6\times10^{11}$ Pa.

Que donnerait une simple analyse dimensionnelle de $P(0)$?

Données : $M_{\mathrm{T}} = 6{,}0\times10^{24}\,\mathrm{kg}$; $R_{\mathrm{T}} = 6{,}4\times10^3\,\mathrm{km}$ et $\mathscr{G}(R_{\mathrm{T}}) \simeq g_0 = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Exercice n° 10 : Baromètre de Huygens ★★★

Un baromètre de Huygens est représenté ci-contre.
Il comporte une cuve à mercure dont la surface libre en contact avec l'atmosphère extérieure à l'altitude du point A a une section d'aire S. Le tube barométrique comporte un renflement autour du point B de section s_1, surmonté d'un tube plus fin autour de C de section s_2. Le mercure de masse volumique ρ_1 montre jusqu'au niveau du point B. Il est surmonté par de la glycérine de masse volumique ρ_2 dont la surface libre est au niveau C.
L'espace au-dessus de C est considéré comme vide.
L'appareil est en équilibre pour une certaine valeur P de la pression atmosphérique. On suppose que si celle-ci augmente d'une petite quantité $\mathrm{d}P$, le niveau du point B monte alors de $\mathrm{d}z_1$ et celui du point C monte de $\mathrm{d}z_2$.



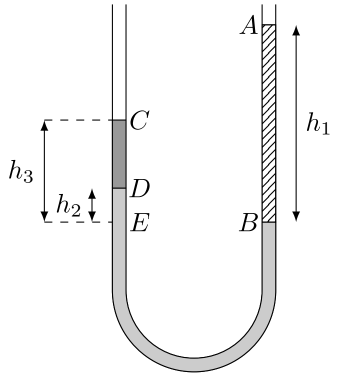
Exprimer le rapport $\dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}P}$ en fonction des données. Que représente ce rapport pour l'instrument ? Commenter le résultat obtenu.
AN : $S = 50\,\mathrm{cm}^2$, $s_1 = 5\,\mathrm{cm}^2$, $s_2 = 0{,}2\,\mathrm{cm}^2$, $\rho_2 = 1{,}05\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, $\rho_1 = 13{,}6\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.

Correction de l'exercice n° 2 « De l'eau dans le diesel »:

1. En appliquant la loi fondamentale de l'hydrostatique, il vient :
$$P_{\text{max}} = \rho_d g H + P_{\text{a}}$$
le réservoir étant ouvert à l'air libre et supposé entièrement rempli de diesel.
2. Le réservoir n'est plus entièrement rempli de diesel. Il est supposé contenir de l'eau et de l'air, c'est-à-dire que $h_{\text{e}} + h_{\text{d}} \neq H$.
On a alors :
$$P_{\text{max}} = \rho_{\text{d}} g h_{\text{d}} + \rho_{\text{e}} g h_{\text{e}} + P_{\text{a}} \Rightarrow h_{\text{d}} = \frac{\rho_{\text{d}} H - \rho_{\text{e}} h_{\text{e}}}{\rho_{\text{d}}}$$
3. Application numérique :
$$\tau = 100 \frac{h_{\text{d}}}{H} = 100 \frac{\rho_{\text{d}} H - \rho_{\text{e}} h_{\text{e}}}{\rho_{\text{d}}} = 91,5\%$$

Correction de l'exercice n° 3 « Mesure de la masse volumique de l'éthanol »:

Posons les points A,B,C, D et E :



Ainsi :
- Par continuité de la pression à l'interface eau-air : $P_{\text{A}} = P_0$;
- Par continuité de la pression à l'interface éthanol-air : $P_{\text{C}} = P_0$;
- En appliquant le loi fondamentale de la statique des fluides à l'eau considérée incompressible :
$$P_{\text{A}} - P_{\text{B}} = -\rho_1 g (z_{\text{A}} - z_{\text{B}}) = -\rho_1 g h_1$$
- En appliquant le loi fondamentale de la statique des fluides à l'éthanol considéré incompressible :
$$P_{\text{C}} - P_{\text{D}} = -\rho_3 g (z_{\text{C}} - z_{\text{D}}) = -\rho_3 g (h_3 - h_2)$$
- En appliquant le loi fondamentale de la statique des fluides au mercure considéré incompressible :
$$P_{\text{D}} - P_{\text{E}} = -\rho_2 g (z_{\text{D}} - z_{\text{E}}) = -\rho_2 g h_2$$
- Par application du théorème de Pascal : $P_{\text{E}} = P_{\text{B}}$.

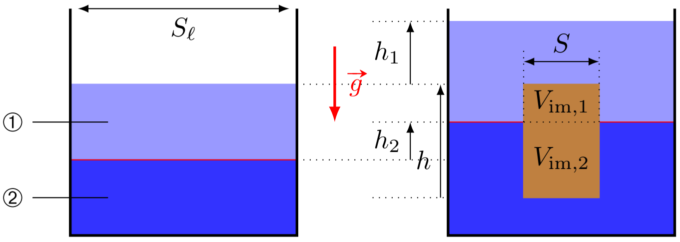
Ainsi,
$$P_{\text{C}} - P_{\text{D}} = P_0 - P_{\text{D}} = -\rho_3 g (h_3 - h_2)$$
Or,
$$\begin{aligned} P_{\text{D}} &= P_{\text{E}} - \rho_2 g h_2 \\ &= P_{\text{B}} - \rho_2 g h_2 \\ &= P_{\text{A}} + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 \\ &= P_0 + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 \end{aligned}$$
En remplaçant P_{D} par l'expression que nous venons de trouver :

$$\rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 = \rho_3 g (h_3 - h_2)$$

Finalement :

$$\rho_3 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{h_3 - h_2} \overset{A.N.}{=} 8{,}00 \times 10^{-1}\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$$

Correction de l'exercice n° 4 « Solide en équilibre entre deux liquides »:



Commençons par faire un schéma du dispositif.
Au système {solide} immergé, effectuons un bilan des forces. Il est soumis à :

- son poids : $m\vec{g} = \rho_{\mathrm{s}} V_{\mathrm{s}} \vec{g}$;
- deux poussées d'Archimède :
  - du liquide ② : $\overrightarrow{\Pi_2} = -\rho_2 V_{\mathrm{im},2}\vec{g}$;
  - du liquide ① : $\overrightarrow{\Pi_1} = -\rho_1 V_{\mathrm{im},1}\vec{g}$;

À l'équilibre (1$^{\text{ère}}$ loi de Newton, principe d'inertie), $m\vec{g} + \overrightarrow{\Pi_1} + \overrightarrow{\Pi_2} = \vec{0}$. En projection le long de l'axe vertical, on déduit la masse volumique du solide :

$$\cancel{g}\left[\rho_{\mathrm{s}} V_{\mathrm{s}} - \rho_2 V_{\mathrm{im},2} - \rho_1 V_{\mathrm{im},1}\right] = 0 \Rightarrow \rho_{\mathrm{s}} V_{\mathrm{s}} = \rho_1 V_{\mathrm{im},1} + \rho_2 V_{\mathrm{im},2}$$

Par ailleurs, le solide et les liquides étant des phases condensées incompressibles et indilatables, le volume se conserve. L'élévation du niveau du liquide ① correspond donc au volume du solide (exprimé en divisions). L'énoncé nous indique les volumes mesurés :

$$V_{\mathrm{s}} = V_{\mathrm{im},1} + V_{\mathrm{im},2} = 120\,\mathrm{div} \text{ et } V_{\mathrm{im},2} = 80\,\mathrm{div}$$

Il est alors facile de conclure :

$$\rho_{\mathrm{s}} = \frac{1}{3}\rho_1 + \frac{2}{3}\rho_2 \overset{\text{A.N.}}{=} 1{,}248 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$$

Correction de l'exercice n° 5 « Modèle de troposphère et ascension d'un ballon sonde »:

1. D'après la relation fondamentale de la statique (pour un GP avec $\rho = PM/RT$ avec un axe z ascendant) :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T_0 - kz}$$

   Par intégration entre $z = 0$ et z quelconque :

$$\ln\frac{P(z)}{P_0} = \frac{Mg}{kR}\ln\left(1 - \frac{k}{T_0}z\right) \Rightarrow P(z) = P_0\left(1 - \frac{k}{T_0}z\right)^{\frac{Mg}{kR}}$$

2. D'après l'EEGP, $\rho = PM/RT$ donc :

$$\rho(z) = \frac{P_0 M}{RT_0}\left(1 - \frac{k}{T_0}z\right)^{\frac{Mg}{kR}-1} = \rho_0\left(1 - \frac{k}{T_0}z\right)^{\frac{Mg}{kR}-1}$$

3. Opérons un bilan des forces sur le système ballon-sonde dans le référentiel terrestre supposé galiléen :
   - son poids : $-(m + d\rho_0 V_0)g\vec{u}_z$
   - la poussée d'Archimède : $\rho(z)V(z)g\vec{u}_z$

   Ainsi la force ascensionnelle est la résultante de ces deux forces :

$$\vec{F} = (\rho(z)V(z) - (m + d\rho_0 V_0))g\vec{u}_z$$

   Tant que le ballon monte, son volume augmente (car la pression extérieure diminue) jusqu'à atteindre un volume maximal V_{m}. Notons $z_{\max}$ l'altitude maximale atteinte et qui signifie nécesairement que la force ascensionnelle est de norme nulle :

$$\rho(z_{\max})V_{\mathrm{m}} - (m + d\rho_0 V_0) = 0 \Rightarrow \frac{m + d\rho_0 V_0}{V_{\mathrm{m}}} = \rho_0\left(1 - \frac{k}{T_0}z_{\max}\right)^{\frac{Mg}{kR}-1}$$

Soit après calcul :

$$z_{\max} = \frac{T_0}{k}\left(1 - \left(\frac{m + d\rho_0 V_0}{\rho_0 V_{\mathrm{m}}}\right)^{\frac{kR}{Mg-kR}}\right) \overset{\text{A.N.}}{=} 6510\,\mathrm{m}$$

La surpression de l'hélium à $z_{\max}$ vaut :

$$P_{\text{hélium}} - P(z_{\max}) = \frac{d\rho_0 V_0 R T_0}{M(\mathrm{He})V_{\mathrm{m}}} - P_0\left(1 - \frac{k}{T_0}z\right)^{\frac{Mg}{kR}} = P_0\left(\frac{dM(\mathrm{air})V_0}{M(\mathrm{He})V_{\mathrm{m}}} - \left(1 - \frac{k}{T_0}z\right)^{\frac{Mg}{kR}}\right) \overset{\text{A.N.}}{=} 9{,}94 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$$

☺ Correction de l'exercice n° 6 « Building 101 »:

Partie I

1. En utilisant la relation des gaz parfaits, il vient : $\rho = \dfrac{PM}{RT_0}$.
2. L'air est grossièrement constitué d'un mélange de 4/5 de N_2 et 1/5 de O_2 soit une masse molaire :

$$M = \frac{4}{5}M_{\mathrm{N_2}} + \frac{1}{5}M_{\mathrm{O_2}} = \frac{4}{5} \times 28 + \frac{1}{5} \times 32 = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$$

3. On remplace ρ par son expression dans la loi fondamentale de l'hydrostatique avant d'intégrer :

$$\mathrm{d}P = -\frac{PM}{RT_0}g\mathrm{d}z \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{gM}{RT_0}\mathrm{d}z \Rightarrow P = P_0 \exp\left(-\frac{gM}{RT_0}z\right)$$

4. (a) On a donc :

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{gM}{RT_0}z\right) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{k}\right)$$

avec $k = \dfrac{RT_0}{gM} = 8{,}76\,\mathrm{km}$.

On suppose que $k \gg H$, on peut donc faire un développement limité au premier ordre de la relation précédente :

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{gM}{RT_0}z\right) \simeq P_0\left(1 - \frac{gM}{RT_0}z\right) \Rightarrow H = \frac{RT_0}{gM}\left(1 - \frac{P_H}{P_0}\right) = 495\,\mathrm{m}$$

L'hypothèse précédente est donc vérifiée.

(b) D'après l'expression de la force de gravitation, on a :

$$g_H = \frac{GM_T}{(R_T + H)^2} \simeq g_0\left(1 - 2\frac{H}{R_T}\right) \simeq g_0$$

Partie II.

5. $T_H = 279\,\mathrm{K} = T_0$, il est donc justifié de tenir compte de la variation de la température avec l'altitude.
6. (a) On a maintenant :

$$\mathrm{d}P = -\frac{PM}{R(T_0 - \lambda z)}g\mathrm{d}z \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{gM}{R}\frac{\mathrm{d}z}{T_0 - \lambda z} \Rightarrow \ln\frac{P}{P_0} = \frac{gM}{\lambda R}\ln\frac{T_0 - \lambda z}{T_0} = \frac{gM}{\lambda R}\ln\left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)$$

On remarque que $\dfrac{\lambda z}{T_0} = 1{,}08 \times 10^{-2}$ ce qui est une valeur limite pour faire un DL1.

Si on fait un DL1, on a alors :

$$\ln\frac{P}{P_0} = \frac{gM}{\lambda R}\ln\left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right) \simeq -\frac{gMz}{RT_0} \Rightarrow z \simeq \frac{RT_0}{gM}\ln\frac{P_0}{P} = 509\,\mathrm{m}$$

Si on fait un calcul direct, on trouve :

$$z = \frac{T_0}{\lambda}\left(1 - \exp\frac{\lambda R}{gM}\ln\frac{P}{P_0}\right) = 506\,\mathrm{m}$$

ce qui confirme la limite de validité du DL1.

En réalité, la hauteur de la tour 101 (car elle a 101 étages) est de 508 m. L'exploitation de la mesure barométrique doit donc bien se faire en tenant compte de la variation de la température avec l'altitude.

Correction de l'exercice n° 8 « Force de pression sur un barrage plan »:

On veut calculer la force exercée par l'eau du lac artificiel sur le barrage de Serre-Ponçon. On considère que le barrage est plan. Cette force s'écrit :

$$\overrightarrow{F_p} = \iint_{M\in\mathscr{S}} \mathrm{d}\overrightarrow{F_p}(M) = \iint_{M\in\mathscr{S}} -P(M)\overrightarrow{\mathrm{d}S_M}$$

La surface $\mathscr{S}$ d'intégration est la surface trapézoïdale verticale du barrage. D'après la Figure 1, les forces élémentaires sont toutes dans le sens de $\vec{u}_x$ donc $\overrightarrow{F_p}$ est colinéaire à $\vec{u}_x$. On cherche donc à calculer :

$$||\overrightarrow{F_p}|| = F_{px} = \iint_{M\in\mathscr{S}} P(M)\mathrm{d}S_M$$

D'après l'équation barométrique :

$$P(M) = -\rho g z + \text{cste}$$

Quand $z = H$, $P(H) = P_0$, donc :

$$P(M) = P_0 + \rho g(H - z)$$

La surface d'intégration $\mathscr{S}$ est plane dans le plan (Oyz), ainsi, la surface élémentaire $\mathrm{d}S_M = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Il reste à définir les bornes de l'intégrale double. La coordonnée z varie entre 0 et H. La variation de la coordonnée y dépend de z. Il faut donc chercher les équations des droites obliques délimitant le barrage sachant qu'elles passent par les points, à gauche, $(-\frac{L}{2}, H)$ et $(-\frac{\ell}{2}, 0)$ et, à droite, $(\frac{L}{2}, H)$ et $(\frac{\ell}{2}, 0)$. On en déduit que y varie entre $-\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{L-\ell}{H}z\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{L-\ell}{H}z\right)$
Finalement :

$$F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} \int_{y=-\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{L-\ell}{H}z\right)}^{y=\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{L-\ell}{H}z\right)} (P_0 + \rho g(H-z))\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

On calcule d'abord l'intégrale sur y (puisque ses bornes dépendent de z) puis l'intégrale sur z :

$$F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} (P_0 + \rho g(H-z)) \left(\int_{y=-\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{L-\ell}{H}z\right)}^{y=\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{L-\ell}{H}z\right)} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

$$F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} (P_0 + \rho g(H-z)) \left(\ell + \frac{L-\ell}{H}z\right) \mathrm{d}z$$

En distribuant :

$$F_{px} = \int_{z=0}^{z=H} P_0\ell\mathrm{d}z + \int_{z=0}^{z=H} P_0\frac{L-\ell}{H}z\mathrm{d}z + \int_{z=0}^{z=H} \rho g(H-z)\ell\mathrm{d}z + \int_{z=0}^{z=H} \rho g(Hz - z^2)\frac{L-\ell}{H}\mathrm{d}z$$

Par intégration directe :

$$F_{px} = P_0\ell H + P_0\frac{L-\ell}{\cancel{H}}\frac{H^{\cancel{2}}}{2} + \rho g\ell\left(H^2 - \frac{H^2}{2}\right) + \rho g\frac{L-\ell}{\cancel{H}}\left(\frac{H^{\cancel{3}2}}{2} - \frac{H^{\cancel{4}3}}{3}\right)$$

En réarrangeant l'expression, on obtient :

$$F_{px} = \frac{1}{2}P_0H(\ell + L) + \frac{1}{6}\rho g H^2(L + 2\ell)$$

Le terme proportionnel à P_0 ne présente que peu d'intérêt, car c'est la contribution de la pression atmosphérique à la force exercée par l'eau sur le barrage : l'air exerce une pression sur l'eau, qui, *de facto*, exerce une pression sur le barrage. Ce terme est compensé par l'action de la même pression atmosphérique en aval du barrage.
La force que le barrage doit supporter est alors :

$$F_{px,\text{eau}} = \frac{1}{6}\rho g H^2(L + 2\ell) \overset{A.N}{=} 1{,}13 \times 10^{10}\,\mathrm{N}$$

Correction de l'exercice n° 9 « Au centre de la Terre ... »:
Au système {roche} incompressible et indilatable, appliquons la relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\mathrm{d}P = -\rho_0 \mathscr{G}(r)\mathrm{d}r = -\rho_0 \frac{GM_{\mathrm{T}} r}{R_{\mathrm{T}}^3}\mathrm{d}r$$

Intégrons entre le centre $(r = 0; P = P(0))$ et la surface $(r = R_{\mathrm{T}}; P = P_{\mathrm{surf}} \ll P(0))$:

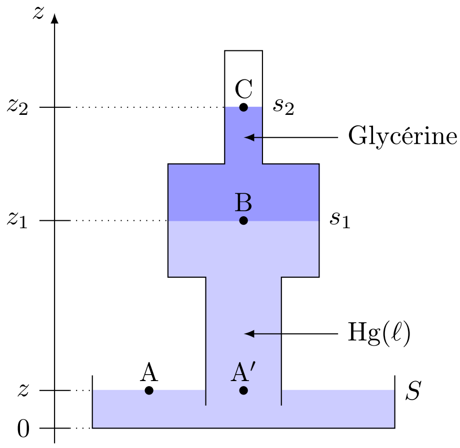
$$\int_{P(0)}^{P_{\mathrm{surf}}} \mathrm{d}P = -\rho_0 \frac{GM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}^3} \int_0^{R_{\mathrm{T}}} r\mathrm{d}r = -\frac{M_{\mathrm{T}}}{\frac{4\pi R_{\mathrm{T}}^3}{3}} \frac{GM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}^{\cancel{3}}} \times \frac{\cancel{R}_{\mathrm{T}}^{\cancel{2}}}{2} \Rightarrow P(0) = \frac{3}{8\pi} \times \frac{GM_{\mathrm{T}}^2}{R_{\mathrm{T}}^4} \overset{\text{A.N.}}{=} 1{,}7 \times 10^{11}\ \mathrm{Pa}$$

Cette valeur est très proche de la valeur communément admise : ce modèle quoique très simpliste permet de trouver l'ordre de grandeur de la pression au centre de la Terre.
Par analyse dimensionnelle, en cherchant $P(0)$ en fonction des données : $P(0) = kG^{\alpha} M_{\mathrm{T}}^{\beta} R_{\mathrm{T}}^{\gamma}$:

$$\left\{\begin{array}{l} [P] = [F] \cdot \mathrm{L}^{-2} \\ [G] = [F] \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{M}^{-2} \end{array}\right. \Rightarrow [F] \cdot \mathrm{L}^{-2} = [F]^{\alpha} \cdot \mathrm{L}^{2\alpha} \cdot \mathrm{M}^{-2\alpha} \times \mathrm{M}^{\beta} \times \mathrm{L}^{\gamma} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta - 2\alpha = 0 \\ 2\alpha + \gamma = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -4 \end{array}\right.$$

Ainsi, par analyse dimensionnelle, on retrouve bien que $P(0) = k \times \dfrac{GM_{\mathrm{T}}^2}{R_{\mathrm{T}}^4}$.

Correction de l'exercice n° 10 « Baromètre de Huygens »:



Appliquons la loi de Pascal (forme intégrée de la relation fondamentale de la statique des fluides aux phases condensées incompressibles et indilatables) au système $\{\mathrm{Hg}(\ell)\}$ entre A′ (à la même altitude que A) et B :

$$P_{\mathrm{atm}} = P_{\mathrm{A}} = P_{\mathrm{A'}} = P_{\mathrm{B}} + \rho_1 g\,(z_1 - z) \tag{1}$$

Faisons de même dans la {glycérine} :

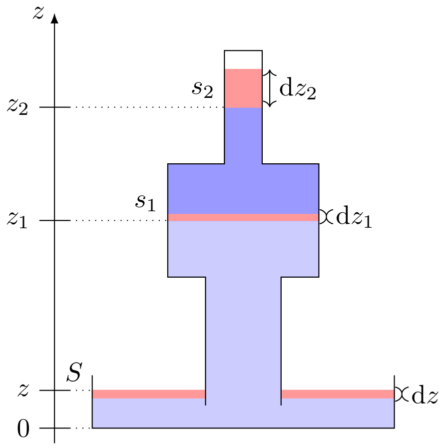
$$P_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{C}} + \rho_2 g\,(z_2 - z_1) \tag{2}$$

En combinant les relations (1) et (2), avec $P_{\mathrm{C}} = 0$, on déduit :

$$P_{\mathrm{atm}} = \rho_1 g\,(z_1 - z) + \rho_2 g\,(z_2 - z_1) \tag{3}$$

On considère que la pression atmosphérque varie d'une petite quantité $\mathrm{d}P$ (voir schéma ci-contre avec $\mathrm{d}P > 0$). Les niveaux des interfaces entre fluides varient respectivement de $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z_1$ et $\mathrm{d}z_2$, reliés par la conservation des volumes (phases incompressibles) :

$$-S\mathrm{d}z = s_1 \mathrm{d}z_1 = s_2 \mathrm{d}z_2 \tag{4}$$



Dérivons la relation (3) par rapport à z_2 (attention, z et z_1 ne sont pas des constantes !) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z_2} &= \rho_1 g \left(\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}z_2} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z_2}\right) + \rho_2 g \left(1 - \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}z_2}\right)\\ &\overset{(4)}{=} \rho_1 g \left(\frac{s_2}{s_1} + \frac{s_2}{S}\right) + \rho_2 g \left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right)\end{aligned}$$

On déduit donc immédiatement la sensibilité de l'appareil en inversant la relation précédente :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}P} = \frac{1}{\rho_1 g \left(\frac{s_2}{s_1} + \frac{s_2}{S}\right) + \rho_2 g \left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right)} &\overset{\text{A.N.}}{=} 6{,}35 \times 10^{-5}\,\mathrm{m \cdot Pa^{-1}}\\ &= 8{,}35\,\mathrm{mm \cdot mmHg^{-1}}\end{aligned}$$

Ce baromètre à deux liquides est donc plus sensible qu'un baromètre classique à un liquide pour laquelle on peut estimer la sensibilité : $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}P} = \dfrac{1}{\rho_1 g} \simeq 7{,}4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m \cdot Pa^{-1}}$.