

Corrigé du DS n°6

Exercice 1 : espaces vectoriels

1. (a) $F = \{(x, y, z, x + 3y + 2z) \in \mathbf{R}^4, x, y, z \in \mathbf{R}\}$
 $= \{x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 3) + z(0, 0, 1, 2), x, y, z \in \mathbf{R}\}$

On pose $u = (1, 0, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0, 3)$, $w = (0, 0, 1, 2)$. Alors $F = \text{Vect}(u, v, w)$

ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

- (b) On pose $\mathcal{B} = (u, v, w)$. On vient de voir que $\mathcal{B}$ est génératrice de F .

$$\text{rg}(u, v, w) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_1 - 3L_2 - 2L_3} \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$\text{rg}(u, v, w) = \text{card}(u, v, w)$ donc $\mathcal{B}$ est libre. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de F , et $\dim(F) = 3$.

- (c) def appartient(u) :

[x,y,z,t] = u

return x+3*y+2*z-t == 0

2. (a) $P = \text{Mat}_C(e_1, u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\text{rg}(P) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{L_2 \leftrightarrow L_4} \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 4$.

- (c) $\text{rg}(P) = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$ donc P est inversible, et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^4$.

3. (a) $\text{rg}(g_1, g_2, g_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Donc $\dim(G) = 2$ et (g_1, g_2) est une base de G (puisque'il ne sont pas colinéaires).

- (b) $(x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbf{R}, (x, y, z, t) = a.g_1 + b.g_2$

$$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbf{R}, \begin{cases} a = x \\ -a + b = y \\ 2b = z \\ a + b = t \end{cases} \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbf{R}, \begin{cases} a = x \\ b = x + y \\ 0 = 2x + 2y - z \\ 0 = -2x - y + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2x + y - t = 0 \end{cases}$$

Un système d'équations cartésiennes de G est : $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2x + y - t = 0 \end{cases}$.

4. (a) H est l'intersection de deux sous-espace vectoriels de $\mathbf{R}^4$, donc H est un s-ev de $\mathbf{R}^4$.

- (b) $H \subset G$ et $\dim(G) = 2$ donc $\dim(H) \leq 2$: $\dim(H) \in \{0, 1, 2\}$.

- (c) Soit $h \in H$. Alors $h \in G$ donc $\exists a, b \in \mathbf{R}, h = a.g_1 + b.g_2 = (a, -a + b, 2b, a + b)$

et $h \in F$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de F : $a + 3(-a + b) + 4b - (a + b) = 0$.

On en déduit que : $-3a + 6b = 0$ donc $a = 2b$. On pose $b = 1$ (donc $a = 2$) : $h = (2, -1, 2, 3) \in H$.

- (d) D'après les questions précédentes, H est un s-ev contenant h donc H contient $\text{Vect}(h)$.

De plus, $g_1 \notin F$ car ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de F .

Ceci montre que $G \not\subset F$ donc que $H \neq G$: $\dim(H) \neq 2$ donc $\dim(H) = 1$.

En conclusion : $H = \text{Vect}(h) = \text{Vect}(2, -1, 2, 3)$.

Exercice 2 : Équation trigonométrique

1) f est définie en x tel que : $\begin{cases} x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

2) $\mathcal{D}_f$ est centré et : $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{(-x)\sin(-x)} = f(x)$, donc f est paire.

3abc) $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc par opérations : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

On prolonge donc f par continuité en 0 en posant : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4) Par opérations, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. On dérive f en utilisant la formule de dérivée d'un quotient,

et on trouve après simplification et factorisation : $\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{(1 - \cos x)(x - \sin x)}{x^2 \sin^2 x}$.

5a) On pose $g(x) = x - \sin(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

Alors g est dérivable sur $\mathbf{R}$, et $\forall x \in \mathbf{R}, g'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. Donc g est croissante sur $\mathbf{R}$.

Sur $[0, \pi]$, $g'(x) > 0$ sauf en 1 point (en 0) donc g est strictement croissante sur $[0, \pi]$.

Ainsi, $\forall x \in]0, \pi]$, $g(x) > g(0) = 0$. Enfin, pour $x \geq \pi$, $g(x) \geq g(\pi) = \pi > 0$.

En conclusion : $\forall x > 0, g(x) > 0$ donc $x - \sin(x) > 0$.

5b) Par opérations, $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x) = +\infty$

5c) D'après 4 et 5a, $f'(x) > 0$ sur $]0, \pi[$, donc f est strictement croissante sur $]0, \pi[$.

On en déduit que $\tilde{f}$ est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0, \pi[$.

D'après le théorème de la bijection, $\tilde{f}$ réalise une bijection de $[0, \pi[$ vers $\tilde{f}([0, \pi[) = J$.

D'après 5b, $J = [\frac{1}{2}, +\infty[$ donc $\tilde{f}$ est une bijection de $[0, \pi[$ dans $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

6a)

```
from math import sin, cos, pi
```

```
def ftilde(x) :
    if x == 0 : return 1/2
    else : return (1-cos(x)) / (x*sin(x))
```

6b) On sait que $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \tilde{f} = +\infty$ donc pour tout y fixé, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]\pi - \alpha, \pi[$, $\tilde{f}(x) \geq y$.

```
def borne(y) :
    b = 0
    while ftilde(b) < y :
        b = (b+pi)/2
    return b
```

6c)

```
def dichotomie(y,eps) :
```

```
    a = 0
    b = borne(y)
    while b-a > eps :
        m = (a+b)/2
        if (ftilde(a)-y)*(ftilde(m)-y) < 0 : b = m
        else : a = m
    return a
```

Exercice 3 : Suites de racines

1. (a) Par règle sur les fonctions polynomiales : $\varphi_n(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^3$ donc $\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = +\infty$.

(b) φ_n est **continue** sur l'intervalle $\mathbf{R}$. D'après le TVI, $\varphi_n(\mathbf{R})$ est un intervalle.

D'après 1a, $\varphi_n(\mathbf{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$ donc φ_n est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

(c) On en déduit que : $\forall y \in \mathbf{R}$, l'équation $\varphi_n(x) = y$ possède au moins une solution $x \in \mathbf{R}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation (E_n) possède au moins une solution réelle.

2. (a) Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3/2} = 0^+$, par quotient on a : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.}$

En $+\infty$, on a : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$

- (b) Puisque $\lim_{x \rightarrow 3} x^{3/2} = 3^{3/2} \neq 0$, on a $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 3}{\sim} \frac{x-3}{3^{3/2}}.}$

- (c) On fait le changement de variable $h = x - 3$, on a :

$$f(3+h) - \frac{h}{3^{3/2}} = h((3+h)^{-3/2} - 3^{-3/2}) = 3^{-3/2}h \left(\left(1 + \frac{h}{3}\right)^{-3/2} - 1 \right)$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{\sim} 3^{-3/2}h \left(-\frac{3}{2} \times \frac{h}{3} \right) = -\frac{h^2}{2 \times 3^{3/2}}.$$

On a bien montré : $\boxed{f(x) - \frac{x-3}{3^{3/2}} \underset{x \rightarrow 3}{\sim} -\frac{(x-3)^2}{2 \times 3^{3/2}}.}$

- (d) La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ par quotient de fonctions usuelles dérivables et :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{x^{3/2} - (x-3)\frac{3}{2}x^{1/2}}{x^3} = \frac{2x - 3(x-3)}{2x^{5/2}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{9-x}{2x^{5/2}}.}$$

- (e) On a $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 9$. De plus, $f(3) = 0$ et $f(9) = \frac{6}{9^{3/2}} = \frac{2}{9}$.

D'où le tableau de variations :

x	0	3	9	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
f	$-\infty$	0	$\frac{2}{9}$	0

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x_n \in \mathbf{R}$ une solution de (E_n) .

- (a) x_n solution de $(E_n) \Leftrightarrow x_n^3 = n(x_n - 3)^2$ donc $x_n^3 \geq 0$, et donc $x_n \geq 0$.

De plus, 0 n'est pas solution de (E_n) car $-9n \neq 0$. Ainsi : $\boxed{x_n \in \mathbf{R}_+^*}.$

- (b) Ainsi x_n appartient à l'ensemble de définition de f et d'après (E_n) : $f(x_n)^2 = \frac{(x_n - 3)^2}{x_n^3} = \frac{1}{n}$.

On en déduit que $\boxed{f(x_n) \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}}.$

- (c) $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{9} \Leftrightarrow \sqrt{n} < \frac{9}{2} \Leftrightarrow n < \frac{81}{4} = 20 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow n \leq 20$ car n est un entier.

- (d) Si $n \leq 20$, on a $f(x_n) \leq \frac{2}{9} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, d'après **2e**. On a donc $f(x_n) = -\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Comme f est continue et strictement croissante sur $]0, 3]$, elle est bijective de $]0, 3]$ dans $f([0, 3]) =]-\infty, 0]$ et l'équation (E_n) admet une unique solution dans $]0, 3]$.

Enfin, $\forall x > 3$, $0 < f(x) < \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc (E_n) n'a pas de solution dans $[3, +\infty[$.

Conclusion : l'équation (E_n) admet une unique solution dans $\mathbf{R}$.

- (e) g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, 9]$. D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $]0, 9]$ dans $g([0, 9]) =]-\infty, \frac{2}{9}]$.

Si $n > 20$, $-\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{9}$ donc $g(x) = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ possède une unique solution $a_n = g^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ possède une unique solution $b_n = g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

g^{-1} a le même sens de variations que g donc g^{-1} est strictement croissante sur $]0, 9]$.

On a donc : $a_n < 3 = g^{-1}(0) < b_n < 9$.

De même, h est continue et strictement décroissante sur $[9, +\infty[$ donc réalise une bijection de $[9, +\infty[$ dans $]0, \frac{2}{9}]$. Si $n > 20$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ possède une unique solution $c_n = h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Conclusion : (E_n) possède exactement 3 solutions réelles a_n, b_n, c_n telles que : $a_n < 3 < b_n < 9 < c_n$.

4. (a) Comme $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$ est strictement décroissante et $n \mapsto -\frac{1}{\sqrt{n}}$ est strictement croissante, en composant avec g^{-1} on en déduit que la suite $(a_n)_{n>20}$ est strictement croissante et la suite $(b_n)_{n>20}$ est strictement décroissante.

D'après le théorème de la bijection, g^{-1} est continue donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} g^{-1}(y) = g^{-1}(0) = 3.$$

On déduit de la même façon que b_n tend vers 3 et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 3$.

- (b) D'après l'équivalent de f en 3 on a, puisque $x = b_n$ tend vers 3 lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = f(b_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b_n - 3}{3^{3/2}} \text{ et donc } b_n - 3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3^{3/2}}{\sqrt{n}}.$$

- (c) D'après l'équivalent de la question **2c** avec $x = b_n$ qui tend vers 3 lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$f(b_n) - \frac{b_n - 3}{3^{3/2}} = -\frac{1}{3^{3/2}} \left(b_n - 3 - \frac{3^{3/2}}{\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{(b_n - 3)^2}{2 \times 3^{3/2}}$$

$$\Leftrightarrow b_n - 3 - \frac{3^{3/2}}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(b_n - 3)^2}{2}$$

et d'après l'équivalent de $b_n - 3$ trouvé à la question précédente :

$$b_n - 3 - \frac{3^{3/2}}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(3^{3/2}/\sqrt{n})^2}{2} = \frac{27}{2n}, \text{ soit : } b_n - 3 - \frac{3^{3/2}}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{27}{2n}.$$

- (d) D'après **3e**, $c_n = h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ avec h^{-1} strictement décroissante,

donc $(c_n)_{n>20}$ est strictement croissante (composée de fonctions décroissantes).

$\lim_{+\infty} h = 0$ donc $\lim_0 h^{-1} = +\infty$. Par composée de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{x \rightarrow 0^+} h^{-1}(x) = +\infty$.

- (e) D'après **2a**, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc : $\frac{1}{\sqrt{n}} = f(c_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{c_n}} \Leftrightarrow c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.