Devoir Maison n°13

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. **Étude des variations de f :**
   (a) Étudier la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée f'.
   (b) Étudier la fonction φ définie par $\varphi(x) = 1 + e^x - xe^x$ (tableau de variations, limites).
   (c) En déduire qu'il existe un unique réel a tel que $f'(a) = 0$.
   Montrer que : $a \in]1, 2[$ et $f(a) = e^{-a}$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f (en précisant les limites).

2. **Étude locale en 0 :**
   (a) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en 0.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x(1-e^x)}{2(1+e^x)}$.
   (c) En déduire un équivalent en 0 de $f(x) - \dfrac{x}{2}$.
   (d) Que peut-on en déduire au sujet de la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$?

3. **Étude en $-\infty$ et représentation graphique :**
   (a) Déterminer un équivalent de $f(x) - x$ en $-\infty$.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$
   et préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
   (c) En utilisant les résultats précédents, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   On donne : $a \approx 1,3$. On pourra utiliser un repère non orthonormé.

4. **Approximation de a :**
   Soit h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = 1 + e^{-x}$.
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Prouver que a est l'unique solution de l'équation : $h(x) = x$.
   (b) Montrer que : $\forall x \geqslant 1,\ |h'(x)| \leqslant e^{-1}$.
   (c) Déduire des 2 questions précédentes que : $\forall x \geqslant 1,\ |h(x) - a| \leqslant e^{-1}\,|x - a|$.
   On pourra utiliser l'IAF sur l'intervalle de bornes a et x.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1} - a| \leqslant e^{-1}\,|u_n - a|$.
   (e) Montrer que : $a - 1 < e^{-1}$.
   (f) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}$.
   (g) En déduire le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$.

5. **Informatique :**
   (a) Écrire une fonction `u(n)` renvoyant le terme u_n de la suite (u_n).
   Cette fonction pourra être itérative, ou récursive.
   (b) Écrire une fonction `approximation(p)` renvoyant une valeur approchée du réel a à 10^{-p} près à l'aide de la fonction `u` et du résultat obtenu question **(4f)**.

* * *