Corrigé du DM n°13

Étude de $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+e^x}$

1. **Variations de f**

   (a) Par opérations, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et : $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{1\times(1+e^x) - xe^x}{(1+e^x)^2}$.

   Soit : $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{1+e^x-xe^x}{(1+e^x)^2}$.

   (b) φ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1$ par croissances comparées.
   De plus, $\varphi(x) = 1 + (1-x)e^x$ et $(1-x)e^x \underset{+\infty}{\sim} -xe^x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	1	↗	2	↘	$-\infty$

   (c) D'après **1a**, $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(1+e^x)^2}$ donc $f'(x) = 0 \iff \varphi(x) = 0$.
   Or : $\forall x \leqslant 0, \varphi(x) \geqslant 1$ donc : $\forall x \leqslant 0,\ \varphi(x) \neq 0$.
   Par ailleurs, φ est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$ et réalise donc une bijection de $\mathbf{R}_+$ vers $\varphi(\mathbf{R}_+) =]-\infty, 2]$.
   $0 \in]-\infty, 2]$ donc 0 admet un unique antécédent a par φ dans $\mathbf{R}_+$.
   De plus, $\varphi(1) = 1 > 0$ et $\varphi(2) = 1 - e^2 < 0$ donc $a \in]1, 2[$.
   Enfin, $1 + e^a = ae^a$ puisque $\varphi(a) = 0$. Ainsi, $f(a) = \dfrac{a}{ae^a} = e^{-a}$.

   Conclusion : f' s'annule une unique fois. En ce point $a \in]1,2[$, $f(a) = e^{-a}$.

   (d) Par opérations, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x}$ donc par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   D'après les questions précédentes, on obtient le signe de $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(1+e^x)^2}$.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	e^{-a}	↘	0

2. **Étude locale en** 0

   (a) $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$ donc l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en 0 est : $y = \dfrac{x}{2}$.

   (b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{1+e^x} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2x - x(1+e^x)}{2(1+e^x)} = \dfrac{x(1-e^x)}{2(1+e^x)}$.

   (c) On sait que $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$. De plus, $1 + e^x \to 2$ donc $1 + e^x \underset{0}{\sim} 2$. Ainsi, $f(x) - x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{4}$.

(d) $-\dfrac{x^2}{4} \leqslant 0$ donc au voisinage de 0, $f(x) - \dfrac{x}{2} \leqslant 0$.

On en déduit que $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C}_f \text{ est localement en-dessous de sa tangente } T.}$

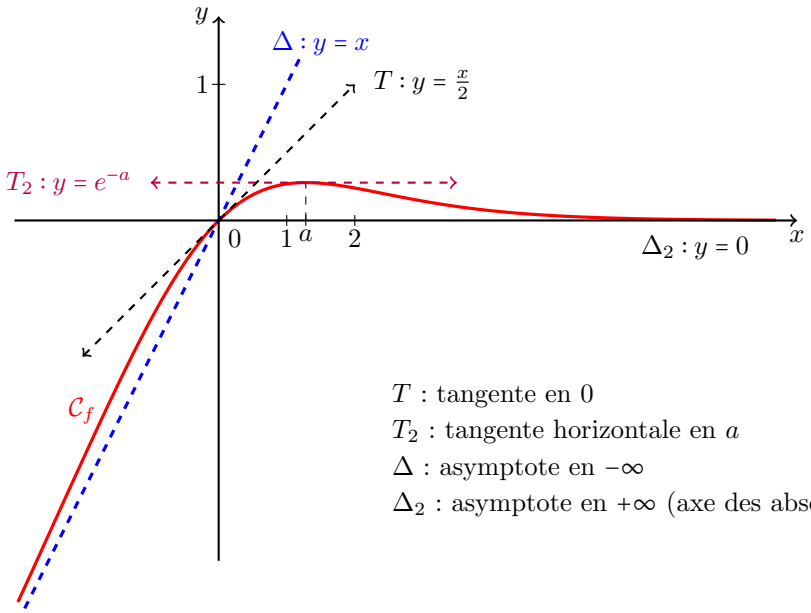
3. **Étude en $-\infty$ et graphe :**

(a) $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) - x = \dfrac{x}{1+e^x} - x = \dfrac{x - x(1+e^x)}{1+e^x} = \dfrac{-xe^x}{1+e^x}$.

Mais $1 + e^x \underset{-\infty}{\sim} 1$, donc par quotient d'équivalents : $\boxed{f(x) - x \underset{-\infty}{\sim} -xe^x.}$

(b) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^x = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. De plus, $f(x) - x \geqslant 0$ dès que $x \leqslant 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $\mathbf{R}_-$.

(c) **Représentation graphique de f :**



T : tangente en 0
T_2 : tangente horizontale en a
Δ : asymptote en $-\infty$
Δ_2 : asymptote en $+\infty$ (axe des abscisses)

4. **Approximation de a**

(a)
$$\begin{aligned} \varphi(a) = 0 &\iff 1 + (1-a)e^a = 0 \\ &\iff e^{-a} = a - 1 \\ &\iff 1 + e^{-a} = a \end{aligned}$$

$\boxed{a \text{ est l'unique solution de l'équation } h(x) = x.}$

(b) h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \geqslant 1$, $h'(x) = -e^{-x}$ donc : $\forall x \geqslant 1$, $|h'(x)| \leqslant e^{-1}$.

(c) Soient I le segment de bornes a et x, et $\mathring{I}$ l'intervalle ouvert de bornes a et x.
Alors h est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. D'après l'inégalité des accroissements finis :
$|h(x) - h(a)| \leqslant M.|x - a|$ où M est le sup de $|h'(t)|$ pour $t \in \mathring{I}$.
D'après **4a**, $h(a) = a$, et d'après **4b**, $M \leqslant e^{-1}$. Ainsi : $\boxed{\forall x \geqslant 1, |h(x) - a| \leqslant e^{-1}|x - a|.}$

(d) $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) \geqslant 1$ et $u_0 = 1 \geqslant 1$, donc $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geqslant 1$.
On applique le résultat précédent à $x = u_n$: $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n+1} - a| \leqslant e^{-1}|u_n - a|.}$

(e) $h(a) = a$ donc : $a - 1 = e^{-a}$. De plus, $a > 1$ donc $e^{-a} < e^{-1}$.

(f) Soit $\mathcal{H}_n$: "$|u_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}$". Prouvons par récurrence que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- Initialisation : $|u_0 - a| = |1 - a| = a - 1 < e^{-1}$ d'après l'étude précédente. Ainsi, $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  On sait : $|u_{n+1} - a| \leqslant e^{-1}|u_n - a|$ donc, par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - a| \leqslant e^{-1} \times e^{-(n+1)}$.
  Donc $|u_{n+1} - a| \leqslant e^{-(n+2)}$, et ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbf{N}, |u_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}.}$

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(n+1)} = 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim u_n = a.}$

5. **Informatique**

```
from math import exp
def h(x) :
    return 1 + exp(-x)

def u(n) :
    '''version itérative'''
    u0 = 1
    for _ in range(n) :
        u0 = h(u0)
    return u0

def urec(n) :
    '''version récursive'''
    if n == 0 :
        return 1
    return h(urec(n-1))

def approximation(p) :
    n = 0
    while exp(-n-1) > 10**(-p) :
        n += 1
    return u(n)
```