Devoir Maison n°14

Exercice : Une primitive délicate

Le but de cet exercice est de déterminer une primitive sur $\mathbf{R}_+^\star$ de la fonction $f : x \longmapsto \sin(\ln x)$.

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbf{R}_+^\star$.
   Si F est une primitive de f sur $\mathbf{R}_+^\star$, comment obtient-on l'ensemble des primitives de f sur $\mathbf{R}_+^\star$?
2. On pose : $g(t) = \sin(t)e^t$.
   Déterminer une primitive de la fonction g.
   On pourra procéder par double primitivation par parties.
3. En effectuant le changement de variables : $t = \ln(x)$, montrer que : $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$
   puis déterminer une primitive F de la fonction f.

Problème : Une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de W_n pour tout entier naturel n.
2. Calculer W_0, W_1 et W_2.
3. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est positive et décroissante.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
   Indication : dans l'écriture de W_{n+2}, on pourra écrire : $(\sin t)^{n+2} = \sin t\,(\sin t)^{n+1}$,
   et procéder à une intégration par parties.
5. Déduire des questions précédentes que : $\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$,
   puis que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
6. En raisonnant par récurrence sur l'entier naturel p, montrer que :
$$\forall p \in \mathbf{N},\ W_{2p} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{p}\frac{2k-1}{2k} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \prod_{k=1}^{p}\frac{2k}{2k+1}.$$
   On rappelle qu'un produit dont l'ensemble d'indices est vide est par convention égal à 1.
7. Traitement informatique en langage *Python*
   (a) Écrire une fonction `produitPair(p)` qui renvoie la valeur de W_{2p}.
   (b) Écrire une fonction `produitImpair(p)` qui renvoie la valeur de W_{2p+1}.
   (c) Écrire une fonction `W` d'argument un entier n qui renvoie la valeur de W_n.
   Cette fonction `W` utilisera les deux fonctions précédentes.
   (d) Calcul approché de W_n par la méthode des rectangles :
   écrire une fonction `rectanglesW(n,N)` renvoyant une valeur approchée de W_n en utilisant une subdivision de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de taille N.

* * *