

## I Variables aléatoires réelles (VAR)

1. Définition
2. Image d'une VAR, image réciproque
3. Fonction d'une VAR
4. Loi d'une VAR
5. Fonction de répartition ( $\rightarrow$  *Annexe*)

## II VAR usuelles

1. Loi certaine ( $\rightarrow$  *Annexe*)
2. Loi uniforme ( $\rightarrow$  *Annexe*)
3. Loi de Bernoulli ( $\rightarrow$  *Annexe*)
4. Loi binomiale ( $\rightarrow$  *Annexe*)

## III Moments d'une VAR

1. Espérance ( $\rightarrow$  *Annexe*)
2. Propriétés de l'espérance ( $\rightarrow$  *Annexe*)
3. Moments d'ordre  $r$  ( $\rightarrow$  *Annexe*)
4. Variance ( $\rightarrow$  *Annexe*)
5. Écart-type ( $\rightarrow$  *Annexe*)

## IV Formules des lois usuelles

1. Loi certaine ( $\rightarrow$  *Annexe*)
2. Loi uniforme ( $\rightarrow$  *Annexe*)
3. Loi de Bernoulli ( $\rightarrow$  *Annexe*)
4. Loi binomiale ( $\rightarrow$  *Annexe*)

## V Indépendance

1. Indépendance deux-à-deux ( $\rightarrow$  *Annexe*)
2. Conséquences ( $\rightarrow$  *Annexe*)
3. Corrélation ( $\rightarrow$  *Annexe*)
4. Indépendance mutuelle ( $\rightarrow$  *Annexe*)

## VI Compléments

1. Inégalité de Markov ( $\rightarrow$  *Annexe*)
2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev ( $\rightarrow$  *Annexe*)
3. Variance d'une somme de VAR ( $\rightarrow$  *Annexe*)

# Annexes

1.5 Fonction de répartition :  $F_X : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \mathbf{P}(X \leq x) \end{cases}$

2.1 Loi certaine :  $X$  suit la loi certaine de valeur  $a$  lorsque  $X(\Omega) = \{a\}$ .  
 $\mathbf{P}(X = a) = 1$  et  $\forall b \in \mathbf{R} \setminus \{a\}, \mathbf{P}(X = b) = 0$ .

2.2 Loi uniforme :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$  avec  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$  lorsque  $X(\Omega) = A$   
 et  $\forall x \in A, \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{card}(A)}$

2.3 Loi de Bernoulli :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  lorsque  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et  $\begin{cases} \mathbf{P}(X = 1) = p \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$

2.4 Loi binomiale :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  lorsque  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

3.1 Espérance :  $\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x)$ . Si  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , alors  $\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{P}(X = x_i)$

$X$  est une VAR centrée lorsque  $\mathbf{E}(X) = 0$ .

3.2 Propriétés de l'espérance :

- $\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$  LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE
- Généralisation : soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de VAR, soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ .  
 Alors :  $\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{E}(X_i)$ .
- Si  $X \geq 0$ , alors  $\mathbf{E}(X) \geq 0$  POSITIVITÉ DE L'ESPÉRANCE
- Si  $X \leq Y$ , alors  $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$  CROISSANCE DE L'ESPÉRANCE.

Définition :  $Y = X - \mathbf{E}(X)$  est la VAR centrée associée à  $X$ . Elle vérifie :  $\mathbf{E}(Y) = 0$ .

Formule de transfert : Soit  $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ . Alors :  $\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbf{P}(X = x)$

3.3 Moments d'ordre  $r$  :  $\forall r \in \mathbf{N}^*, m_r(X) = \mathbf{E}(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbf{P}(X = x)$ .

*Remarque* :  $\mathbf{E}(X) = m_1(X)$

3.4 Variance :  $\mathbf{V}(X) = m_2(X - \mathbf{E}(X)) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$

Formule de König-Huygens :  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = m_2(X) - (m_1(X))^2$

Propriété :  $\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$

3.5 Écart-type :  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$  Propriété :  $\forall a, b \in \mathbf{R}, \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$

4.1 Loi certaine de valeur  $a$  :  $\mathbf{E}(X) = a$  et  $\mathbf{V}(X) = 0$ .

4.2 Loi uniforme : Si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ , alors  $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$  et  $\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)(b-a+1)}{12}$ .

**On retient** : en posant  $n = b - a + 1 = \text{card}(\llbracket a, b \rrbracket)$ , alors  $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$ .

4.3 Loi de Bernoulli : Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $\mathbf{E}(X) = p$  et  $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$ .

4.4 Loi binomiale : Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $\mathbf{E}(X) = np$  et  $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$ .

5.1 Indépendance :  $X, Y$  sont indépendantes

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$$

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \text{les événements } [X = x] \text{ et } [Y = y] \text{ sont indépendants.}$$

5.2 Formules d'indépendance :

Si  $X, Y$  sont indépendantes, alors :  $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y)$  et  $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$

*Attention* : la réciproque est fautive.

### 5.3 Corrélation :

- la **covariance** de  $X, Y$  est  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X)) \times (Y - \mathbf{E}(Y)))$
- Formule de König-Huygens :  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$
- $X, Y$  sont non corrélées si et seulement si  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .
- Si  $X, Y$  sont indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  donc  $X$  et  $Y$  sont non corrélées.

### 5.4 Indépendance mutuelle : $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes

$$\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i)$$
$$\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega), \text{ les événements } [X_1 = x_1], \dots, [X_n = x_n] \text{ sont mutuellement indépendants.}$$

- Si  $(X_1, \dots, X_n)$  sont des VAR mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.
- Indépendance par paquets : soit  $\mathcal{F} = (X_1, \dots, X_n)$  une famille de VAR mutuellement indépendantes. Alors toute famille de VAR construites sur des sous-familles (paquets) disjointes de  $\mathcal{F}$  est mutuellement indépendante.

### 6.1 Inégalité de Markov : Si $X \geq 0$ , alors : $\forall a > 0, \quad \mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$

### 6.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit $X$ une VAR d'espérance $m$ et d'écart-type $\sigma$ .

$$\text{Alors : } \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

### 6.3 Variance d'une somme de variables aléatoires :

- $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$
- Généralisation :  $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) + 2 \times \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$