I Généralités

1. Polynômes, fonctions polynomiales
2. Degré, coefficient dominant, monôme dominant
3. Égalité de polynômes
4. Ensembles de polynômes : $\mathbf{K}[X], \mathbf{K}_n[X]$

II Opérations sur les polynômes

1. Combinaisons linéaires
2. Multiplication
3. Composition
4. Dérivation
5. Conséquences sur les degrés ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Racines d'un polynôme

1. Définition
2. Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$
3. Multiplicité d'une racine
4. Caractérisation des racines ($\rightarrow$ *Annexe*)

IV Compléments (hors-programme)

1. Polynômes scindés
2. Factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ ($\rightarrow$ *Annexe*)
3. Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

<u>2.5 Degrés de polynômes</u> :

$(*)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K},\ \deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$

$(*)$ $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

$(*)$ $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

$(*)$ $\deg(P') = \deg(P) - 1 \quad \text{si } \deg(P) > 0$

$\qquad\quad = -\infty \qquad\qquad \text{si } \deg(P) \leqslant 0$

<u>3.4 Caractérisation des racines</u> : Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. Alors :

α est une racine de P de multiplicité m

$\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbf{K}[X],\quad P = (X-\alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$

$\Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

<u>4.2 Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$</u> :

• *Théorème de D'Alembert-Gauss* : Dans $\mathbf{C}[X]$, tout polynôme est scindé.

• Dans $\mathbf{C}[X]$, tout polynôme non constant P s'écrit sous la forme : $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$

où $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ sont les racines distinctes de P, de multiplicités $m_1, m_2, \cdots, m_r$

et λ est le coefficient dominant de P. On a sous cette forme : $\deg(P) = \sum_{k=1}^{r} m_k$.

<u>4.3 Décomposition dans $\mathbf{R}[X]$</u> : Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Alors P se factorise dans $\mathbf{R}[X]$ sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} (a_\ell X^2 + b_\ell X + c_\ell)^{n_\ell}$$

où λ est le coefficient dominant de P, $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont les racines réelles de P de multiplicités respectives $m_1, ..., m_r$, et où $(a_\ell X^2 + b_\ell X + c_\ell)$ sont des trinômes de discriminant $\Delta_\ell < 0$.