DS n°7, mathématique

Durée : 3 heures 30
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation. L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 3 pages, et est constitué de quatre exercices indépendants. Pour chaque exercice, un temps conseillé est indiqué.

Exercice 1 : autour de la fonction Gamma *(temps conseillé : 45 minutes)*

Pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que les fonctions F_n sont bien définies pour tout entier naturel n, et qu'elles sont positives sur $\mathbf{R}_+$.
2. Soit $x \geqslant 0$. Exprimer $F_0(x)$ puis $F_1(x)$ en fonction de x.
3. (a) Définir en langage *Python* la fonction `fn(n,t)` renvoyant $t^n e^{-t}$.
   (b) Écrire une fonction `rectangles(x,n,N)` renvoyant une valeur approchée de $F_n(x)$ en utilisant la méthode des rectangles avec une subdivision de l'intervalle $[0,x]$ de taille N.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \geqslant 0,\ F_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)F_n(x)$.
   On pourra utiliser une intégration par parties.
5. Montrer par récurrence que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_n(x) = n!$
6. Préciser la dérivée f_n de F_n et en déduire le tableau de variations complet de F_n.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $u_n = F_n(1)$.

7. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?
8. En utilisant la **question 4**, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{u_n}{n!} - \dfrac{e^{-1}}{(n+1)!}$
9. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{u_n}{n!} = 1 - e^{-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
10. En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Exercice 2 : Une relation fonctionnelle *(temps conseillé : 20 minutes)*

On s'intéresse dans cet exercice aux fonctions f définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+^\star$ vérifiant :

$$\forall a, b > 0,\ f(ab) = f(a) + f(b) \qquad (*)$$

1. Dans cette partie, on pose : $\forall x > 0,\ \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$,
   la fonction ln étant sur $\mathbf{R}_+^\star$ l'unique primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ qui s'annule en 1.
   (a) En effectuant le changement de variables $u = \dfrac{t}{a}$, montrer que :
   $$\forall a, b > 0,\ \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^b \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$
   (b) En utilisant la relation de Chasles, démontrer la relation : $\forall a, b > 0,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ fixé. Montrer que cette relation est encore vraie pour la fonction $x \longmapsto \lambda \ln(x)$.
2. Dans cette partie, on suppose que f est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que : $f(1) = 0$.
   Soit $b > 0$ fixé. On pose : $\forall x > 0,\ g(x) = f(bx)$.
   (b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et grâce à la relation $(*)$, donner deux expressions de $g'(x)$ pour $x > 0$ à l'aide de la fonction f.
   (c) En déduire que : $\forall b > 0,\ f'(1) = bf'(b)$. Dans la suite, on pose λ la constante $f'(1)$.
   (d) Montrer que f est l'unique primitive de la fonction $b \longmapsto \dfrac{\lambda}{b}$ qui s'annule en 1.
   (e) Conclure que les seules fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+^\star$ vérifiant $(*)$ sont les fonctions $\lambda \ln$ $(\lambda \in \mathbf{R})$.

Exercice 3 : Variables aléatoires *(temps conseillé : 1 heure 15)*

On considère un dé truqué tétraédrique (à 4 faces), dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
On suppose que la probabilité de faire 4 vaut $\frac{1}{2}$, et que les probabilités de faire $1, 2$ ou 3 sont identiques.
On jette ce dé, et on note X le résultat apparaissant.

1. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X.
2. Montrer que l'espérance de X vaut 3.
3. (a) Calculer la variance de X.
   (b) Rappeler la variance d'un loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$, et la comparer à la variance de X.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On effectue des tirages successifs et avec remise d'une boule de l'urne.
On suppose que chaque tirage est équiprobable.

4. Dans cette question, on effectue 3 tirages successifs, et on note Y le nombre de fois où la boule numéro 1 a été piochée.
   (a) Nommer la loi suivie par Y, en précisant ses paramètres en fonction de n.
   (b) Exprimer en fonction de n l'espérance, et la variance de Y.
   (c) Préciser la probabilité d'obtenir exactement une fois la boule numéro 1.
5. Dans cette question, on jette le dé truqué. Son résultat X étant connu, on effectue X tirages successifs, et on note Z le nombre de fois où la boule numéro 1 a été piochée.
   (a) Préciser le support (l'univers-image) de Z.
   (b) Que dire des événements $[X = i]$ pour $i \in [\![1, 4]\!]$?
   (c) En déduire que : $\forall k \in Z(\Omega)$, $\mathbf{P}(Z = k) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\binom{i}{k}p^k q^{i-k} + \frac{1}{2}\binom{4}{k}p^k q^{4-k}$
   où p, q sont des réels à exprimer en fonction de n.
   On rappelle que le coefficient binomial $\binom{i}{k}$ est nul dès que $k > i$.
   (d) Comment expliquer simplement, lorsque p, q sont des réels positifs de somme 1, que :
   $$\sum_{k=0}^{i} k\binom{i}{k}p^k q^{i-k} = ip \quad ?$$
   (e) En déduire l'espérance de Z, et la comparer à celle de Y.
6. Dans cette question, on effectue à nouveau 3 tirages successifs. Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on note R_i le résultat du i-ème tirage. On note enfin M le plus grand des numéros piochés.
   Par exemple, si $n = 10$ et qu'on pioche successivement les boules numérotées $4, 7$ et 4, alors $R_1 = 4, R_2 = 7, R_3 = 4$ et $M = 7$.
   (a) Pour tout $m \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, déterminer : $\mathbf{P}(R_i \leqslant m)$.
   (b) Exprimer l'événement $[M \leqslant m]$ en fonction des événements $[R_i \leqslant m]$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$.
   (c) Les variables aléatoires R_i étant mutuellement indépendantes, en déduire que :
   $$\forall m \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}(M \leqslant m) = \left(\frac{m}{n}\right)^3$$
   (d) Déterminer la loi de M.
   (e) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $\sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   (f) Montrer que l'espérance de M est : $\mathbf{E}(M) = \frac{(n+1)(3n-1)}{4n}$.
   (g) Si on ne connaît pas le nombre n de boules de l'urne, et qu'on pioche les boules numérotées 153, 600 et 71, quelle estimation de la valeur de n peut-on raisonnablement proposer ?
7. **Traitement informatique** en langage Python. *Pensez à importer les fonctions nécessaires !*
   (a) Définir une fonction `X()` renvoyant une simulation de X.
   (b) Définir une fonction `binomial(a,b)` renvoyant une simulation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres a et b.
   (c) En utilisant les fonctions précédentes, définir une fonction `Z(n)` renvoyant une simulation de Z.
   (d) Écrire une fonction `M(n)` renvoyant une simulation de M.
   (e) En déduire une fonction `esperanceM(n,N)` estimant $\mathbf{E}(M)$ à l'aide de N simulations.

Exercice 4 : Étude d'une fonction *(temps conseillé : 1 heure)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x(2+x)} & \text{si } x \notin \{-2, 0\} \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1. Déterminer un équivalent de f en 0.
   En déduire que f est continue sur $\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.
2. Justifier rapidement que f est dérivable sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$, et donner l'expression de sa dérivée.
3. On pose pour tout x réel : $\psi(x) = (x^2 - 2)e^x + 2(1+x)$.
   (a) Déterminer la dérivée seconde de ψ, et étudier son signe.
   (b) Dresser le tableau de variations de ψ', en y portant sa limite en $-\infty$ et la valeur de son minimum.
   (c) Montrer que ψ est croissante sur $\mathbf{R}$, et calculer $\psi(0)$.
   (d) En déduire le tableau de variations complet de f (avec limites et extremum relatif).
4. Dans cette question, on étudie la dérivabilité de f en 0.
   On pose pour tout x réel : $\varphi(x) = 2(e^x - 1) - x(2+x)$.
   (a) Pour $h \neq 0$, exprimer le taux d'accroissement $\Delta_0(h)$ de f en 0 à l'aide de la fonction φ.
   (b) Étudier le signe de φ'' sur $\mathbf{R}$ et donner les variations de φ' sur $\mathbf{R}$.
   (c) Montrer que si $c \in]0, h[$ ou $]h, 0[$, alors : $0 \leqslant \varphi'(c) \leqslant \varphi'(h)$.
   (d) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à φ sur $[0, h]$ ou $[h, 0]$, montrer que :
   $$\forall h \in \mathbf{R},\ |\varphi(h)| \leqslant |h| \times \varphi'(h)$$
   (e) Montrer alors que pour tout $h > -2$, $h \neq 0$, on a : $|\Delta_0(h)| \leqslant \dfrac{1}{2+h} \times \left| \dfrac{e^h - 1}{h} - 1 \right|$
   (f) En déduire que f est dérivable en 0, et préciser la valeur de $f'(0)$.
5. En utilisant tous les résultats précédents, donner l'allure de la courbe représentative de f.

Fin du sujet

Relecture, encadrement des résultats et numérotation des pages : 10 minutes.