Corrigé du DS n°7

Exercice 1 : autour de la fonction Gamma

1. $\forall n \in \mathbf{N},\ f_n : t \longmapsto t^n e^{-t}$ est continue sur le segment $[0,x]$. Ainsi $F_n(x)$ existe pour tout $x \geqslant 0$.
   $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \geqslant 0,\ f_n \geqslant 0$ sur $[0,x]$. Par positivité de l'intégrale, $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \geqslant 0,\ F_n(x) \geqslant 0.}$

2. $F_0(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \big[-e^{-t}\big]_0^x$ donc $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ F_0(x) = -e^{-x} + 1.}$
   $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-t}\,\mathrm{d}t$. On effectue une intégration par parties (IPP).
   Soient : $u(t) = -e^{-t},\ v(t) = t$. Alors $u, v \in \mathcal{C}^1([0,x])$ et $u'(t) = e^{-t},\ v'(t) = 1$. Par IPP :
   $F_1(x) = \big[-te^{-t}\big]_0^x - \displaystyle\int_0^x 1 \times (-e^{-t})\,\mathrm{d}t = -xe^{-x} + \big[-e^{-t}\big]_0^x$ donc $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ F_1(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1.}$

3. (a)
```
from math import exp
def fn(n,t) :
    return t**n * exp(-t)
```
.

   (b)
```
def rectangles(x,n,N) :
    s,pas = 0,x/N
    for k in range(N) :
        s += fn(n,k*pas)
    return s*pas
```

4. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x \geqslant 0$. On pose $u(t) = -e^{-t},\ v(t) = t^{n+1}$ pour tout $t \in [0,x]$.
   Alors $u, v \in \mathcal{C}^1([0,x])$ et $\forall t \in [0,x],\ u'(t) = e^{-t},\ v'(t) = (n+1)t^n$.
   Par IPP : $F_{n+1}(x) = \big[-t^{n+1}e^{-t}\big]_0^x - \displaystyle\int_0^x -(n+1)t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$
   donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \geqslant 0,\ F_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)F_n(x).}$

5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$: " $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = n!$ ".
   - Initialisation : $F_0(x) = 1 - e^{-x}$ donc par opérations $\lim\limits_{x\to+\infty} F_0(x) = 1 = 0\,!$ $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geqslant 0$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+1}e^{-x} = 0$
   donc d'après la question précédente et par opérations : $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{n+1}(x) = (n+1) \times n! = (n+1)!$
   Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$. $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \lim\limits_{+\infty} F_n = n!}$

6. $\forall n \in \mathbf{N}$, F_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, de dérivée $F'n = f_n : x \longmapsto x^n e^{-x}$.
   Or $f_n(x) > 0$ sauf en 0 (si $n \geqslant 1$), donc F_n croît strictement sur $\mathbf{R}_+$. D'où le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f_n(x)$		$+$	
F_n	0	$\nearrow$	$n!$

7. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(t^{n+1}e^{-t} - t^n e^{-t}\right)\mathrm{d}t$ par linéarité de l'intégrale
   donc $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Or, sur $[0,1]$, $t - 1 \leqslant 0$ donc $t^n(1-t)e^{-t} \leqslant 0$.
   On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$, soit : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$
   On a vu **question 1** que $u_n \geqslant 0$. Cette suite est donc minorée par 0.
   Étant décroissante, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$

8. D'après la **question 4** et en posant $x = 1$, on a : $u_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)u_n$.
   On divise par $(n+1)!$: $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} = -\dfrac{e^{-1}}{(n+1)!} + \dfrac{u_n}{n!}.}$

9. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $\mathcal{Q}_n$: " $\dfrac{u_n}{n!} = 1 - e^{-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ "

   - Initialisation : $\dfrac{u_0}{0!} = u_0 = F_0(1) = 1 - e^{-1}$ et $1 - e^{-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} = 1 - e^{-1} \times \frac{1}{0!} = 1 - e^{-1}$. $\quad \mathcal{Q}_0$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geqslant 0$ et supposons $\mathcal{Q}_n$ vraie. Alors d'après la **question 8**,

   $\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - e^{-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{e^{-1}}{(n+1)!} = 1 - e^{-1} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$ donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$. $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{u_n}{n!} = 1 - e^{-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$

10. La suite (u_n) converge d'après la **question 7**, donc $\left(\dfrac{u_n}{n!}\right)$ converge vers 0 par opérations.

    On en déduit que $\left(e^{-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ converge vers 1, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.}$

Exercice 2 :

1. (a) Soient $a, b > 0$. On pose $u = \dfrac{t}{a}$, fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a $t = au$ et $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}u$.
   Lorsque $t = a$, $u = 1$ et lorsque $t = ab$, $u = b$.
   Par changement de variables : $\displaystyle\int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^b \frac{1}{au}\,a\mathrm{d}u = \int_1^b \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u.$
   (b) D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
   D'après la question précédente, $\displaystyle\int_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^b \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$
   donc $\boxed{\forall a, b > 0,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).}$
   (c) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\forall a, b > 0,\ \lambda \ln(ab) = \lambda(\ln(a) + \ln(b)) = \lambda \ln(a) + \lambda \ln(b)$
   donc la fonction $x \longmapsto \lambda \ln(x)$ vérifie la relation $(*)$.
2. (a) On utilisa la relation $(*)$ en remplaçant a, b par 1 : $f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ donc $\boxed{f(1) = 0.}$
   (b) $g : x \mapsto f(bx) = f(b) + f(x)$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ par opérations,
   et on a en dérivant chacune des deux expressions : $\boxed{\forall x > 0,\ g'(x) = bf'(bx) = f'(x).}$
   (c) On remplace x par 1 dans la question précédente : $g'(1) = bf'(b) = f'(1)$.
   (d) On obtient donc : $\forall b > 0,\ f'(b) = \dfrac{f'(1)}{b} = \dfrac{\lambda}{b}$ donc f est une primitive sur $\mathbf{R}_+^\star$ de $b \longmapsto \dfrac{\lambda}{b}$.
   Mais d'après la **question 2a**, $f(1) = 0$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse :
   $\boxed{f \text{ est l'unique primitive de } b \longmapsto \dfrac{\lambda}{b} \text{ qui s'annule en 1.}}$
   (e) On a donc : $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\lambda}{b}\,\mathrm{d}b = \lambda \ln(x)$. Ainsi :
   $\boxed{\text{les seules fonctions dérivables sur } \mathbf{R}_+^\star \text{ vérifiant } (*) \text{ sont les fonctions } x \longmapsto \lambda \ln(x) \text{ avec } \lambda \in \mathbf{R}.}$

Exercice 3 :

1. On sait que $\mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$ avec $\mathbf{P}(X = 4) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 3)$.
   On en déduit la loi de X :

k	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

2. On calcule $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} k\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{2}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = 3.}$
3. On calcule $\mathbf{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{2} = \frac{31}{3}.$

D'après le théorème de König-Huygens, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \big(\mathbf{E}(X)\big)^2 = \dfrac{31}{3} - 3^2$ donc $\boxed{\mathbf{V}(X) = \dfrac{4}{3}.}$

Pour une loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$ (dé non truqué), on aurait $\mathbf{V} = \dfrac{4^2-1}{12} = \dfrac{5}{4}$.

$\boxed{\text{La variance du dé truqué est donc plus grande que celle d'un dé bien équilibré.}}$

4. (a) $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \dfrac{1}{n}\right)}$ ... (b) donc $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \dfrac{3}{n} \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \dfrac{3(n-1)}{n^2}.}$

   (c) $\mathbf{P}(Y=1) = \dbinom{3}{1}\left(\dfrac{1}{n}\right)^1\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{3-1}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(Y=1) = \dfrac{3(n-1)^2}{n^3}.}$

5. (a) Au minimum, on ne pioche jamais la boule 1 ($Z=0$) et au maximum on la pioche 4 fois. Ainsi, $\boxed{Z(\Omega) = [\![0,4]\!].}$

   (b) Les événements $[X=i]$ pour $i \in [\![1,4]\!]$ forment un système complet d'événements (SCE).

   (c) D'après la formule des probabilités totales associée à ce SCE :

   $\forall k \in Z(\Omega),\ \mathbf{P}(Z=k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(X=i) \times \mathbf{P}_{[X=i]}(Z=k)$. Mais $\mathbf{P}(X=i) = \dfrac{1}{6}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$

   et $\mathbf{P}(X=4) = \dfrac{1}{2}$ donc : $\mathbf{P}(Z=k) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}_{[X=i]}(Z=k) + \dfrac{1}{2}\mathbf{P}_{[X=4]}(Z=k)$.

   On pose $p = \dfrac{1}{n}$ et $q = 1-p$. Lorsque $[X=i]$, le nombre de fois où la boule 1 est piochée suit une loi binomiale de paramètres i, p. Ainsi : $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $\mathbf{P}_{[X=i]}(Z=k) = \dbinom{i}{k}p^k q^{i-k}$.

   On obtient donc : $\boxed{\forall k \in Z(\Omega),\ \mathbf{P}(Z=k) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\binom{i}{k}p^k q^{i-k} + \dfrac{1}{2}\binom{4}{k}p^k q^{4-k}}$

   (d) Soient $p, q \geqslant 0$ tels que $p+q=1$. On considère une VAR T telle que $T \hookrightarrow \mathcal{B}(i,p)$.

   Alors $\mathbf{E}(T) = ip$ avec $\mathbf{E}(T) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} k\binom{i}{k}p^k q^{i-k}$. On a donc l'égalité demandée.

   (e)
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=0}^{4} k\mathbf{P}(Z=k) &= \sum_{k=0}^{4} k\left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\binom{i}{k}p^k q^{i-k} + \frac{1}{2}\binom{4}{k}p^k q^{4-k}\right)\\
&= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{i} k\binom{i}{k}p^k q^{i-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{4} k\binom{4}{k}p^k q^{4-k} \qquad \text{en échangeant les sommes}\\
&= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} ip + \frac{1}{2}\times 4p \qquad \text{d'après la question précédente}\\
&= \frac{p}{6}\times 6 + 2p \qquad \text{donc } \boxed{\mathbf{E}(Z) = 3p = \frac{3}{n} = \mathbf{E}(Y).}
\end{aligned}$$

6. (a) $[R_i \leqslant m]$ est l'événement : "au i-ème tirage, on a pioché une boule parmi $\{1, \cdots, m\}$".

   Par équiprobabilité, $\boxed{\forall i \in [\![1,3]\!],\ \forall m \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{P}(R_i \leqslant m) = \dfrac{m}{n}.}$

   (b) Obtenir un maximum $\leqslant m$ signifie que toutes les boules piochées portent des numéros $\leqslant m$.

   Donc $\boxed{\forall m \in [\![1,n]\!],\ [M \leqslant m] = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{3}[R_i \leqslant m].}$

   (c) Par indépendance des VAR R_i, on a : $\mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{3}[R_i \leqslant m]\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{3}\mathbf{P}(R_i \leqslant m)$

   donc d'après la **question 6a**, $\boxed{\forall m \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{P}(M \leqslant m) = \left(\dfrac{m}{n}\right)^3.}$

   (d) $M(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Pour tout $m \in M(\Omega)$, $\mathbf{P}(M=m) = \mathbf{P}(M \leqslant m) - \mathbf{P}(M \leqslant m-1)$

   donc $\boxed{\forall m \in M(\Omega),\ \mathbf{P}(M=m) = \left(\dfrac{m}{n}\right)^3 - \left(\dfrac{m-1}{n}\right)^3.}$

(e) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\mathcal{P}_n$: " $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ "

• Initialisation : $\displaystyle\sum_{m=1}^{1} m^3 = 1^3 = 1$ et $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

• Hérédité : soit $n \geqslant 1$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

Alors $\displaystyle\sum_{m=1}^{n+1} m^3 = (n+1)^3 + \sum_{m=1}^{n} m^3 = (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ d'après $\mathcal{P}_n$

donc $\displaystyle\sum_{m=1}^{n+1} m^3 = \frac{(n+1)^2}{4} \times (4(n+1)+n^2) = \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2)^2$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$: $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.}$

(f) On calcule : $\displaystyle\mathbf{E}(M) = \sum_{m=1}^{n} m\mathbf{P}(M=m) = \sum_{m=1}^{n} m\left(\left(\frac{m}{n}\right)^3 - \left(\frac{m-1}{n}\right)^3\right)$

$$\mathbf{E}(M) = \frac{1}{n^3}\sum_{m=1}^{n} m\left(m^3 - (m^3 - 3m^2 + 3m - 1)\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{m=1}^{n}\left(3m^3 - 3m^2 + m\right)$$

$$\mathbf{E}(M) = \frac{1}{n^3}\left(3\sum_{m=1}^{n} m^3 - 3\sum_{m=1}^{n} m^2 + \sum_{m=1}^{n} m\right) = \frac{1}{n^3}\left(\frac{3n^2(n+1)^2}{4} - \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$\mathbf{E}(M) = \dfrac{n+1}{4n^2}\big(3n(n+1) - 2(2n+1) + 2\big) = \dfrac{n+1}{4n^2}\big(3n^2 - n\big)$ donc $\boxed{\mathbf{E}(M) = \dfrac{(n+1)(3n-1)}{4n}.}$

(g) Le nombre de boules de l'urne étant grand (au moins 600), on utilise l'équivalent :
$\mathbf{E}(M) \sim \dfrac{3n^2}{4n} = \dfrac{3n}{4}$. On a obtenu $M = 600$ donc on peut proposer : $\dfrac{3n}{4} \approx 600$ donc $\boxed{n \approx 800.}$

7. (a)
```
import random as rd
def X() :
    r = rd.random()
    if r < 1/6 : return 1
    elif r < 1/3 : return 2
    elif r < 1/2 : return 3
    else : return 4
```
(b)
```
def binomial(a,b) :
    succes = 0
    for _ in range(a) :
        if rd.random() < b :
            succes += 1
    return succes
```
(c)
```
def Z(n) :
    x = X()
    return binomial(x,1/n)
```
(d)
```
def M(n) :
    urne = [k for k in range(1,n+1)]
    tirages = []
    for _ in range(3) :
        tirages.append(rd.choice(urne))
    return max(tirages)
```
(e)
```
def esperanceM(n,N) :
    s = 0
    for _ in range(N) :
        s += M(n)
    return s/N
```

Exercice 4 :

1. Par équivalents usuels : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x(2+x)} = \dfrac{1}{2+x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$ donc f est continue en 0.

Par opérations, f est continue sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathcal{D}.}$

2. Par opérations, f est dérivable sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \notin \{-2, 0\}$:

$f'(x) = \dfrac{x(x+2)e^x - (2x+2)(e^x - 1)}{x^2(2+x)^2}$ soit : $\boxed{f'(x) = \dfrac{(x^2-2)e^x + 2x + 2}{x^2(2+x)^2}.}$

3. (a) Par opérations, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, et on a pour tout réel x :
$\psi'(x) = 2xe^x + (x^2-2)e^x + 2 = (x^2 + 2x - 2)e^x + 2$
et $\psi''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x-2)e^x$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \psi''(x) = x(x+4)e^x.}$

$\psi''(x)$ est du signe de $x(x+4)$ donc :

$\boxed{\psi''(x) < 0 \text{ sur }]-4,0[,\ \psi''(x) > 0 \text{ sur } \mathbf{R} \setminus [-4,0], \text{ et } \psi \text{ s'annule en } -4 \text{ et en } 0.}$

(b) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+2x-2)e^x = 0$ donc par opérations, $\lim\limits_{x\to-\infty} \psi'(x) = 2$.

Vu le signe de ψ'', on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$\psi''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
ψ'	2	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(c) D'après le tableau de variations de ψ', on sait que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\psi'(x) \geqslant 0$.

On en déduit que $\boxed{\psi \text{ est croissante sur } \mathbf{R}.}$ De plus, $\psi(0) = 0$.

(d) D'après la **question 2**, pour tout $x \notin \{-2,0\}$, $f'(x) = \dfrac{\psi(x)}{x^2(2+x)^2}$

D'après la **question 3c**, $\psi \leqslant 0$ sur $\mathbf{R}_-$ et $\psi \geqslant 0$ sur $\mathbf{R}_+$. On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$?$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des limites de f :

$*$ en $-\infty$, $f(x) \underset{-\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

$*$ en -2 à gauche, $x(2+x) \longrightarrow 0^+$ et $e^x - 1 \longrightarrow e^{-2} - 1 < 0$ donc $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$.

$*$ en -2 à droite, $x(2+x) \longrightarrow 0^-$ et $e^x - 1 \longrightarrow e^{-2} - 1 < 0$ donc $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$.

$*$ en $+\infty$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{x^2}$ donc par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. (a) Par définition, $\Delta_0(h) = \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{e^h-1}{h(2+h)} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{2(e^h-1)-h(2+h)}{2h(2+h)}$

donc $\boxed{\forall h \notin \{-2,0\}\,,\ \Delta_0(h) = \dfrac{\varphi(h)}{2h^2(2+h)}.}$

(b) Par opérations, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ et pour tout réel x :

$\varphi'(x) = 2e^x - 2x - 2$ et $\varphi''(x) = 2(e^x - 1)$. Ainsi, $\boxed{\varphi \geqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}_+ \text{ et } \varphi \leqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}_-.}$

On en déduit que $\boxed{\varphi' \text{ est décroissante sur } \mathbf{R}_- \text{ et croissante sur } \mathbf{R}_+.}$

(c) Le minimum de φ' est atteint en 0 et vaut $\varphi'(0) = 0$. Ainsi, $\forall c \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant \varphi'(c)$.

Si $h \geqslant 0$, alors pour tout $c \in]0,h[$, $0 \leqslant \varphi'(c) \leqslant \varphi'(h)$ car φ' est croissante sur $[0,h]$.

Si $h < 0$, alors pour tout $c \in]h,0[$, $0 \leqslant \varphi'(c) \leqslant \varphi'(h)$ car φ' est décroissante sur $[h,0]$.

(d) Si $h > 0$: φ est continue sur $[0,h]$ et dérivable sur $]0,h[$. D'après l'inégalité des accroissements finis (IAF) : $|\varphi(h) - \varphi(0)| \leqslant |h - 0| \times M$ avec M un majorant de $|\varphi'(c)|$ pour tout $c \in]0,h[$.

D'après la question précédente, $M = \varphi'(h)$ convient. On obtient alors : $\boxed{|\varphi(h)| \leqslant |h|\, \varphi'(h).}$

Si $h < 0$: on utilise l'IAF sur $[h,0]$. On obtient le même résultat.

(e) Soit $h > -2, h \neq 0$. D'après la **question 4a**, $\Delta_0(h) = \dfrac{\varphi(h)}{2h^2(2+h)}$

donc $|\Delta_0(h)| = \dfrac{|\varphi(h)|}{2h^2(2+h)} \leqslant \dfrac{|h|\varphi'(h)}{2h^2(2+h)} = \dfrac{|h|(2e^h - 2h - 2)}{2h^2(2+h)} = \dfrac{e^h - h - 1}{|h|(2+h)} = \dfrac{1}{2+h}\left|\dfrac{e^h - h - 1}{h}\right|$

et finalement : $\boxed{\forall h > -2,\ h \neq 0, \quad |\Delta_0(h)| \leqslant \dfrac{1}{2+h}\left|\dfrac{e^h - 1}{h} - 1\right|}$

(f) Par équivalent usuel, $e^h - 1 \underset{0}{\sim} h$ donc $\dfrac{e^h - 1}{h} \underset{0}{\sim} 1$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} - 1 = 0$.

Par opérations, on a donc : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \Delta_0(h) = 0$, donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$

5. Courbe représentative de f :