Exercice 8 :

Une liste non ordonnée correspond à un sous-ensemble de l'ensemble des n personnes.

On sait qu'un ensemble de cardinal n possède au total 2^n sous-ensembles.

Il y a donc 2^n listes de noms dans l'urne.

Exemple avec $n = 3$: soient les personnes Alain (A), Béatrice (B) et Chloé (C).

Il y alors dans l'urne les listes : A, B, C, AB, AC, BC, ABC et la liste vide, ce qui fait $8 = 2^3$ listes.

Soit X le nombre de noms sur une liste piochée au hasard.

Sur l'exemple précédent, X peut valoir de 0 (liste vide) à 3 (liste ABC), donc $X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

On a, par équiprobabilité : $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$, et $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \frac{3}{8}$.

On voit apparaître une loi binomiale!

Cas général : $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors le nombre de listes de longueur k correspond au nombre de sous-ensembles de cardinal k dans un ensemble à n éléments. On sait donc qu'il est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Par équiprobabilité : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$.

On peut alors écrire : $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$,

avec $p = \frac{1}{2}$ et $q = 1 - p$. Ainsi : $X \hookrightarrow B(n, \frac{1}{2})$. En conséquence : $\mathbf{E}(X) = \frac{n}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{n}{4}$.

Exercice 9 :

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note D_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ pièce testée est défectueuse. »

1) Détection par un robot :

Au minimum, $X = 1$ lorsque le robot choisit en premier de tester la pièce défectueuse. Au maximum,

$X = n$ lorsqu'il choisit cette pièce en dernier. Ainsi, $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $[X = k] = D_k$.

Par équiprobabilité, $\mathbf{P}(D_k) = \frac{1}{n}$, donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

X suit donc une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. En conséquence : $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

2) Détection par un humain :

Maintenant, $Y(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ car si la pièce défectueuse n'a pas été repérée au cours des $(n-1)$ premiers tests, alors c'est forcément la dernière, et il est inutile de la tester.

Il n'y a aucune différence jusqu'à l'avant dernier test : $\forall k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, \mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \mathbf{P}(Y = n-1) &= \mathbf{P}(\Omega) - \sum_{k=1}^{n-2} \mathbf{P}(Y = k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n} = 1 - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

On calcule alors l'espérance de Y : $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k}{n} + (n-1) \times \frac{2}{n}$

donc $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n} \times \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{2(n-1)}{n}$ d'où : $\mathbf{E}(Y) = \frac{(n-1)(n+2)}{2n}$.

Pour la variance, on calcule d'abord $\mathbf{E}(Y^2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k^2}{n} + (n-1)^2 \times \frac{2}{n}$,

donc $\mathbf{E}(Y^2) = \frac{1}{n} \times \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} + \frac{2(n-1)^2}{n} = \frac{n-1}{6n} (2n^2 + 5n - 6)$.

On utilise ensuite la formule de König-Huygens :

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{n-1}{6n} (2n^2 + 5n - 6) - \left(\frac{(n-1)(n+2)}{2n}\right)^2$$

Après calculs, on trouve : $\mathbf{V}(Y) = \frac{n-1}{12n^2} (n^3 + n^2 - 12n + 12)$

et on peut factoriser : $\mathbf{V}(Y) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2 + 3n - 6)}{12n^2}$.

Exercice 11 : Les ampoules défectueuses.

1) Conditionnement par boîtes dont le contenu ne provient que d'une seule machine.

X est le nombre d'ampoules défectueuses dans une boîte de n ampoules, donc $0 \leq X \leq n$: $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit $0 \leq k \leq n$. Notons A l'événement : « La boîte ouverte provient de la machine A ».

Alors $(A, \bar{A})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(X = k) + \mathbf{P}(\bar{A}) \times \mathbf{P}_{\bar{A}}(X = k)$.

L'énoncé donne : $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4}$ donc $\mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{1}{4}$.

Par ailleurs, $\mathbf{P}_A(X = k) = \binom{n}{k} 0,1^k \times 0,9^{n-k}$, et $\mathbf{P}_{\bar{A}}(X = k) = \binom{n}{k} 0,2^k \times 0,8^{n-k}$.

On obtient donc : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{4} \times 0,1^k \times 0,9^{n-k} + \frac{1}{4} \times 0,2^k \times 0,8^{n-k} \right)$.

Le calcul de l'espérance donne : $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \left(\frac{3}{4} \times 0,1^k \times 0,9^{n-k} + \frac{1}{4} \times 0,2^k \times 0,8^{n-k} \right)$

donc par linéarité : $\mathbf{E}(X) = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 0,1^k \times 0,9^{n-k} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 0,2^k \times 0,8^{n-k}$.

On reconnaît deux fois la formule de l'espérance pour une loi binomiale, donc : $\mathbf{E}(X) = \frac{3}{4} \times 0,1n + \frac{1}{4} \times 0,2n$.

En conclusion : $\mathbf{E}(X) = \frac{n}{8}$.

2) Une probabilité conditionnelle :

On demande $\mathbf{P}_{[X=0]}(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap [X=0])}{\mathbf{P}(X=0)} = \frac{\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(X=0)}{\mathbf{P}(X=0)} = \frac{\frac{3}{4} \times 0,9^n}{\frac{3}{4} \times 0,9^n + \frac{1}{4} \times 0,8^n}$.

Ainsi, $\mathbf{P}_{[X=0]}(A) = \frac{3 \times 0,9^n}{3 \times 0,9^n + 0,8^n} = \frac{3}{3 + \left(\frac{8}{9}\right)^n}$.

3) Conditionnement par boîtes dont le contenu est mélangé.

Dans chaque boîte, chaque ampoule a maintenant 3 chances sur 4 de provenir de la machine A , et 1 chance sur 4 de provenir de la machine B .

Pour chaque ampoule, la probabilité d'être défectueuse est donc : $p = \frac{3}{4} \times 0,1 + \frac{1}{4} \times 0,2 = \frac{1}{8}$.

La VAR Y suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{8}$.

$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{8}), \mathbf{E}(Y) = \frac{n}{8}$. On remarque que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$: cette seconde façon de conditionner n'a pas changé le nombre moyen d'ampoules défectueuses par boîte.

Exercice 12 : Détecter les erreurs

1) Erreurs détectées lors d'une seule relecture :

On note X le nombre d'erreurs détectées lors d'une relecture.

Chaque erreur a une probabilité $p = 0,75$ d'être détectée, indépendamment des autres.

X suit donc une loi binomiale de paramètres k et $p = 0,75$.

Le nombre moyen d'erreurs détectées lors d'une relecture est : $\mathbf{E}(X) = k \times p = 0,75k$.

2) Erreurs détectées lors de 36 relectures indépendantes :

Chacune des k erreurs a une probabilité $(1-p)^{36} = 0,25^{36} = 2^{-72}$ de ne jamais être détectée, donc une probabilité $p' = 1 - 2^{-72}$ d'être détectée par au moins un des 36 relecteurs.

On note Y le nombre d'erreurs détectées après 36 relectures.

Alors Y suit une loi binomiale de paramètres k et $p' = 1 - 2^{-72}$.

Son espérance vaut donc $\mathbf{E}(Y) = k(1 - 2^{-72})$.

Application numérique : on suppose que le texte contient $k = 100$ erreurs de typographie. C'est beaucoup...

Lors d'une seule relecture, en moyenne 75 erreurs sont détectées. Il en reste 25, c'est beaucoup.