Corrigé du DM n°14

Exercice : Une primitive délicate

1. Existence de primitives :

f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, donc elle y admet des primitives.

Sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$, si F est une primitive de f , alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions G telle que : $G = F + \lambda$, où λ est une constante réelle.

2. Une double PPP :

On pose $u(t) = e^t$ et $v(t) = \sin(t)$. Alors u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, et :

$\forall t \in \mathbf{R}, u'(t) = e^t$ et $v'(t) = \cos(t)$.

Par primitivation par parties (PPP), on a : $\int \sin(t)e^t dt = \sin(t)e^t - \int \cos(t)e^t dt$.

On pose maintenant $u(t) = e^t$ et $v(t) = \cos(t)$.

Alors $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ et : $\forall t \in \mathbf{R}, u'(t) = e^t$ et $v'(t) = -\sin(t)$.

Par seconde PPP, on a : $\int \cos(t)e^t dt = \cos(t)e^t - \int (-\sin t)e^t dt$.

Finalement : $\int \sin(t)e^t dt = \sin(t)e^t - \cos(t)e^t - \int \sin(t)e^t dt$.

Donc : $2 \int g(t) dt = (\sin t - \cos t)e^t$ et $\int \sin(t)e^t dt = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + \lambda (\lambda \in \mathbf{R})$.

3. Primitive de f :

On effectue le changement de variables : $t = \ln x$. On a alors : $x = e^t$ donc $\frac{dx}{dt} = e^t$, soit : $dx = e^t dt$.

Il vient : $\int \sin(\ln x) dx = \int \sin(t)e^t dt = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t)$ d'après la question précédente.

Ainsi, $F(x) = \frac{e^{\ln x}}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$,

soit : $F(x) = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$ est une primitive de f sur $\mathbf{R}_+^*$.

Problème : Une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$. W_n est l'intégrale de Wallis (1616-1703).

1. Existence de W_n

Pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto (\sin t)^n$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc elle y admet des primitives. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, W_n$ existe.

2. Calculs de W_0, W_1 et W_2

$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$ donc $W_0 = \frac{\pi}{2}$. $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos 0$ donc $W_1 = 1$.

$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ donc $W_2 = \frac{\pi}{4}$.

3. La suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est positive et décroissante

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], 0 \leq \sin t \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq (\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$.

Par croissance de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt \leq W_{n+1} \leq W_n$, soit : $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq W_{n+1} \leq W_n$.

4. Relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n

Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $u : t \mapsto -\cos t$ et $v : t \mapsto (\sin t)^{n+1}$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = (n+1) \cos t (\sin t)^n$.

Par IPP : $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v = [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} uv' = [(-\cos t)(\sin t)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)(\cos^2 t)(\sin t)^n dt$

Mais $\cos(\frac{\pi}{2}) = \sin 0 = 0$, et $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ donc il reste :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} dt = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbf{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$

5. Convergence de la suite $\left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)$

Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après la question 3, on a : $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ donc en divisant par $W_n > 0$:

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1. \text{ D'après la question 4, on obtient : } \forall n \in \mathbf{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)$ converge vers 1.

6. Expressions de W_n à l'aide de produits

• Soit $p \in \mathbf{N}$. On pose $\mathcal{P}_p : \ll W_{2p} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}$ et $W_{2p+1} = \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1} \gg$

• Initialisation au rang 0 :

Un produit vide vaut 1, donc les produits précédents valent respectivement $\frac{\pi}{2}$ et 1 lorsque $p = 0$.

On retrouve donc les valeurs de W_0 et W_1 calculées à la question 2. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Hérédité à partir du rang 0 : Soit $p \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}_p$ vraie.

$$\text{Alors } W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{\pi}{2} \times \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \times \prod_{k=1}^{p+1} \frac{2k-1}{2k},$$

$$\text{et } W_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1} = \frac{2p+2}{2p+3} \times \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^{p+1} \frac{2k}{2k+1}, \text{ d'après la question 4 et } \mathcal{P}_p.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

• Conclusion :

$\mathcal{P}_p$ est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0.

D'après le principe de récurrence : $\forall p \geq 0, \mathcal{P}_p$ est vraie.

7. Traitement informatique en langage Python

```
from math import pi, sin
```

```
(a) def prodPair(p) :
    W = 1
    for k in range(1, p+1) :
        W *= (2*k-1) / (2*k)
    return pi*W/2
```

```
(b) def prodImpair(p) :
```

```
    W = 1
    for k in range(1, p+1) :
        W *= 2*k / (2*k+1)
    return W
```

```
(c) def W(n) :
    p = n // 2
    if n%2 == 0 : return prodPair(p)
    else : return prodImpair(p)
```

```
(d) def rectanglesW(n,N) :
    S = 0
    pas = (pi/2) / N
    for k in range(N) :
        S += sin(k*pas)**n
    return S*pas
```