Devoir Maison n°15

Exercice : Factorisation d'un polynôme

Le but de cet exercice est de factoriser entièrement le polynôme :

$$P = 4X^6 - 12X^5 + 13X^4 - 10X^3 + 6X^2 + 2X - 3.$$

1. Préciser le degré et le coefficient dominant de P.
   Combien le polynôme P possède-t-il de racines (distinctes ou non) dans $\mathbf{C}$?
2. Déterminer une racine réelle évidente de P, et étudier sa multiplicité.
3. Montrer que le nombre complexe i est racine de P.
   Quelle autre racine complexe peut-on en déduire ?
4. Déduire des questions précédentes la factorisation complète de P dans $\mathbf{R}[X]$ et dans $\mathbf{C}[X]$.
5. Le polynôme P est-il scindé dans $\mathbf{R}[X]$? dans $\mathbf{C}[X]$?

Problème : Une suite de polynômes

On définit les polynômes $P_n \in \mathbf{R}[X]$ par : $\begin{cases} P_0 = 2 \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbf{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$

1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 2$ et déterminer P_3 et P_4.
2. Factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes P_2, P_3 et P_4

Pour les deux questions suivantes, on pourra procéder par récurrence double.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, P_n est unitaire et de degré n.
4. Soit $x \in \mathbf{R}^\star$. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$.
5. Application : on souhaite factoriser dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $Q = X^4 - 3\sqrt{5}X^3 + 12X^2 - 3\sqrt{5}X + 1$.
   Soit x une racine réelle de Q.
   (a) Montrer que $x \neq 0$ et que : $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\sqrt{5}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 12 = 0$.
   (b) On pose $t = x + \dfrac{1}{x}$. Montrer que : $P_2(t) - 3\sqrt{5}\,t + 12 = 0 \quad (1)$.
   (c) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation (1) d'inconnue t.
   (d) En déduire que Q possède quatre racines réelles $x_1, \cdots, x_4$ dont on précisera les valeurs.
   (e) Donner la forme factorisée de Q.
6. Traitement informatique

   On modélise en langage *Python* un polynôme par la liste de ses coefficients de degré croissant. Ainsi, P_0 est modélisé par la liste $[2]$, P_1 par la liste $[0,1]$ et P_2 par la liste $[-2,0,1]$.

   Dans toutes les questions suivante, L, L_1, L_2 désignent des listes de flottants.

   (a) Écrire une fonction `mult(L,a)` renvoyant la liste obtenue en multipliant tous les termes de la liste L par a. Par exemple, `mult([1,2,3],2)` devra renvoyer `[2,4,6]`.
   (b) Écrire une fonction `decale(L)` renvoyant la liste obtenue à partir de L en insérant un 0 en première position, et en décalant vers la droite tous les éléments de L.
   Par exemple, `decale([1,2,3])` devra renvoyer `[0,1,2,3]`.
   (c) Écrire une fonction `somme(L1,L2)` renvoyant la liste formée par la somme des éléments de même indice des listes L_1, L_2. Si L_1 est plus longue que L_2, les éléments de L_1 d'indices supérieurs ou égaux à la longueur de L_2 seront incorporés sans modification et à la même place dans la liste renvoyée (et de même si L_2 est plus longue que L_1).
   Par exemple, `somme([1,2,3],[4,5])` devra renvoyer `[5,7,3]`.
   (d) En déduire une fonction `P(n)`, utilisant les fonctions précédentes, et renvoyant la liste modélisant le polynôme P_n.

* * *