I Développements limités (DL)

1. Exemples d'approximations polynomiales
2. Définition d'un DL
3. Exemple fondamental : $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$
4. Propriétés élémentaires ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Lien avec la continuité et la dérivabilité ($\rightarrow$ *Annexe*)

II Opérations sur les DL ($\rightarrow$ *Annexe*)

1. Manipulations des "petits o" en 0
2. Troncature
3. Combinaisons linéaires
4. Produit
5. Quotient
6. Composée
7. Intégration
8. Réciproque
9. Dérivation

III Développements limités usuels ($\rightarrow$ *Annexe*)

1. Le théorème de Taylor-Young
2. Formulaire des DL usuels en 0

IV Applications

1. Étude des extrema
2. Étude de limites ou d'équivalents
3. Étude des tangentes

V Branches infinies des courbes

1. Asymptotes verticales
2. Asymptotes horizontales
3. Asymptotes obliques
4. Branches infinies paraboliques

Annexes

1.4a Unicité du DL : Si f admet en x_0 un **DL** d'ordre n, alors le polynôme $P_n(f)$ associé est unique.

1.4b Parité, imparité : Si f est une fonction paire (*resp* : impaire) et possède un $\mathbf{DL}_n$ en 0, alors $P_n(f)$ est un polynôme pair (*resp* : impair).

1.5 Lien avec la continuité et la dérivabilité :

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R} \Leftrightarrow f$ admet un $\mathbf{DL}_0$ en x_0, et dans ce cas $P_0(f) = \ell$.
- f dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ admet un $\mathbf{DL}_1$ en x_0, et dans ce cas $f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \mathrm{o}(x-x_0)$

2.1 Propriétés des o en 0 : Les égalités suivantes se lisent "quand x tend vers 0". $\lambda \in \mathbf{R}$, $n, m \in \mathbf{N}$.

$*$ $\lambda \times \mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}(x^n)$ $*$ $\lambda x^n \times \mathrm{o}(x^m) = \mathrm{o}(x^{n+m})$ $*$ $\mathrm{o}(x^n) \times \mathrm{o}(x^m) = \mathrm{o}(x^{n+m})$

$*$ si $n > m$, $x^n + \mathrm{o}(x^m) = \mathrm{o}(x^m)$ $*$ si $n \geqslant m$, $\mathrm{o}(x^n) + \mathrm{o}(x^m) = \mathrm{o}(x^m)$

2.2 Troncature : Si f admet en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, alors f admet en x_0 un $\mathbf{DL}_m$ à tout ordre $m \leqslant n$, obtenu en ne conservant dans $P_n(f)$ que les monômes de degré inférieur ou égal à m.

2.3 CL de **DL** : Soient f et g admettant en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
Alors $\lambda f + g$ admet en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, et $P_n(\lambda f + g) = \lambda P_n(f) + P_n(g)$.

2.4 Produit : Si, en x_0, f admet un $\mathbf{DL}_n$ et g admet un $\mathbf{DL}_m$, alors le produit fg admet un $\mathbf{DL}_r$.
On obtient $P_r(fg)$ par troncature du produit $P_n(f) \times P_m(g)$.

2.5 Quotient : Si en x_0, f admet un $\mathbf{DL}_n$ et g admet un $\mathbf{DL}_m$, avec $g(x_0) \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ admet en x_0 un $\mathbf{DL}_r$.

2.6 Composée : Si $f(x_0) = 0$, si f admet en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, et si g admet en 0 un $\mathbf{DL}_m$, alors $g \circ f$ admet en x_0 un $\mathbf{DL}_r$. On obtient $P_r(g \circ f)$ par troncature de $P_m(g) \circ P_n(f)$.

2.7 Intégration : Si f admet en x_0 un $\mathbf{DL}_n$, si $F' = f$ sur un voisinage de x_0, alors F admet un $\mathbf{DL}_{n+1}$ en x_0. On a alors : $\big(P_{n+1}(F)\big)' = P_n(f)$.

2.8 Réciproque : Si f admet un $\mathbf{DL}_n$ en 0 ($n \geqslant 1$), et si $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, alors f est localement bijective au voisinage de 0, et sa bijection réciproque f^{-1} admet un $\mathbf{DL}_n$ en $0 = f^{-1}(0)$.
On a alors : $P_n(f^{-1}) \circ P_n(f) \underset{0}{=} P_n(f) \circ P_n(f^{-1}) \underset{0}{=} X + o(X^n)$.

2.9 Dérivation d'un **DL** : $\boxed{\textbf{On ne peut pas en général dériver un DL.}}$

3.1 Théorème de Taylor-Young :
Soit $n \geqslant 1$ et soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}$, telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe.
Alors : $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$

3.2 **DL** usuels en 0 :

$*$ $$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

$*$ $$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$*$ $$\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\big(x^{2n+1}\big).$$

$*$ $$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big).$$

$*$ $$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n).$$

$*$ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$:
$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$
$$\underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Exemple si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $n = 3$: $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o\big(x^3\big)$.