Les exercices qui suivent abordent les thèmes et techniques principaux vus en première année. N'hésitez pas à les aborder dans l'ordre qui vous convient, selon vos goûts ou difficultés.

1. **Définir une fonction, représentation graphique**

   On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \tan(xy) - \ln\left(x + \dfrac{x}{y}\right)$.

   a. Définir en langage *Python* cette fonction f. On utilisera `nan` pour renvoyer la valeur de $f(x, y)$ lorsque (x, y) n'est pas dans l'ensemble de définition de f.

   b. Définir une fonction d'argument y et renvoyant la fonction $x \mapsto f(x, y)$.

   c. Représenter graphiquement sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ la fonction $x \mapsto f(x, 1)$.

   d. À l'aide d'une boucle, représenter sur une même fenêtre graphique les fonctions $x \mapsto f(x, y)$ pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $y \in \left\{\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{10}{10}\right\}$.

2. **Manipulations élémentaires de listes**

   a. Définir une fonction `sommePositif(L)` renvoyant la somme des éléments positifs de la liste `L`.

   b. Définir une fonction `amplitude(L)` renvoyant la différence entre le plus grand élément de la liste `L`, et le plus petit. On n'utilisera pas les fonctions `min` ni `max`.

   c. Définir une fonction `moyennePairs(L)` renvoyant la moyenne des éléments pairs de la liste d'entiers `L`. S'il n'y aucun élément pair, la fonction renverra le message `"pas de terme pair"`.

   d. Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}^\star$ calculant de façon récursive la liste contenant tous les entiers de n chiffres parmi $0, 1$.

   Par exemple, si $n = 3$, cette fonction devra renvoyer la liste : $[100, 101, 110, 111]$.

3. **Calculs de sommes ou de produits**

   a. Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}$ renvoyant $\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n+1)^2$.

   b. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^\star$, $T_n = \displaystyle\sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ k\ln(k) \leqslant n}} \alpha_k$, où $\alpha_k = \dfrac{1}{k}$ si k est pair, et $\alpha_k = \dfrac{1}{k^2}$ sinon.

   Écrire une fonction d'argument n renvoyant T_n.

   c. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$. On pose : $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{2n} \left(1 + e^{-kx}\right)$.

   Écrire une fonction d'arguments n, x renvoyant $P_n(x)$.

   d. Écrire une fonction d'argument un entier n et renvoyant la somme-double : $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \frac{k + \ell}{1 + e^k}$.

4. **Suite réelle 1** Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n + \sin k}{n^2 + k\sqrt{k}}$.

   a. Écrire une fonction d'argument un entier $n \geqslant 1$, et renvoyant la valeur de u_n.

   b. Faire une conjecture concernant le comportement asymptotique de (u_n).

   c. Écrire une fonction d'argument $\varepsilon > 0$ renvoyant le plus petit indice n tel que $|u_n - 1| < \varepsilon$.

5. **Suite réelle 2** Soit $a \in \mathbf{R}$. On définit la suite (u) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = a + (u_n - a)\sin(u_n - a) \end{cases}$

   a. Définir une fonction d'arguments $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{R}$, renvoyant la liste $[u_i,\ i \in [\![0, n]\!]]$.

   b. Définir une fonction récursive renvoyant la valeur de u_n.

   c. À l'aide d'une fonction d'arguments a et n, représenter graphiquement les termes u_i de la suite (u) pour $i \in [\![0, n]\!]$, pour différentes valeur de a. Les termes de la suite (u) seront représentés par des points non reliés. Que constate-t-on ?

   d. Écrire une fonction d'arguments n, A entiers, renvoyant la liste $\left[\dfrac{2(u_n - a)}{\pi},\ a \in [\![0, A]\!]\right]$.

   e. Écrire une fonction d'arguments a et $\varepsilon > 0$, renvoyant le premier indice n tel que $\dfrac{2(u_n - a)}{\pi}$ est proche d'un entier à moins de ε.

6. **Polynômes représentés par des listes** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$.

On représente informatiquement cette fonction polynomiale par la liste $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

a. Écrire une fonction `evaluation(P,x)` renvoyant $P(x)$.

b. Écrire une fonction `derive(P)` renvoyant la liste représentant le polynôme dérivé P'.

c. Écrire une fonction `somme(P,Q)` renvoyant la liste représentant le polynôme $P+Q$.

d. Même question pour une fonction `produit(P,Q)`.

e. On définit la suite de polynômes $(T_n)_n$ par la récurrence : $\begin{cases} T_0 = 1\ ,\ \ T_1 = X \\ \forall n \in \mathbf{N},\ \ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$

$*$ Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}$ renvoyant le polynôme T_n.

$*$ Représenter graphiquement sur $[-2\pi, 2\pi]$ les fonctions $f_n : x \mapsto T_n(\cos x)$ pour $n \in [\![1, 5]\!]$.

7. **Simulation du hasard**

a. Écrire une fonction simulant une VAR suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

b. Érire une fonction simulant une VAR suivant une loi uniforme sur $[\![3, 8]\!]$.

c. Érire une fonction simulant une VAR suivant une loi uniforme sur $[3, 8]$.

d. Écrire une fonction renvoyant une liste contenant les résultats obtenus en jetant n dés bien équilibrés et en otant le plus petit des résultats obtenus.
En déduire une estimation de la moyenne de $n \geqslant 2$ dés où le plus petit est enlevé.

e. Simuler le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un '6' en jetant un dé.
Estimer informatiquement la moyenne de ce nombre de lancers nécessaires.

f. Une expérience aléatoire consiste à piocher une boule dans une urne qui contient initialement 3 boules blanches et 1 boule noire. On modélise informatiquement cette urne par la liste `L = [0,0,0,1]`, où les 0 représentent une boule blanche, et le 1 une boule noire.

(a) Écrire une fonction simulant cette expérience. Elle renverra soit 0, soit 1.

On remet la boule piochée dans l'urne. Si la boule était noire, on ajoute une boule noire dans l'urne. On procède ensuite à des tirages successifs.

(b) Écrire une fonction simulant n tirages successifs ($n \in \mathbf{N}^\star$) et renvoyant une modélisation de l'urne après n tirages.

(c) Écrire une fonction permettant d'estimer informatiquement le nombre moyen de boules noires dans l'urne après n tirages.

8. **Matrices**

a. Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}^\star$ et renvoyant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n-1 \end{pmatrix}$

b. Écrire une fonction prenant pour argument une matrice M de taille $n \times p$, et renvoyant la liste formée par les plus petits coefficients de chaque colonne de M.
En déduire une fonction renvoyant le plus grand des plus petits coefficients de chaque colonne.

9. **Tris**

On considère la relation d'ordre $\preceq$ définie entre deux réels par :
$x \preceq y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor$ ou ($\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ et $x \geqslant y$).
On a ainsi : $1 \preceq 1 \preceq 2,5 \preceq 2 \preceq 3,95 \preceq \pi \preceq 3 \ldots$

a. Écrire une fonction `ordre(x,y)` renvoyant `True` si $x \preceq y$, et `False` sinon.

b. En déduire une fonction triant une liste de flottants selon l'ordre $\preceq$.

10. **Méthodes numériques**

a. Donner une valeur approchée à 10^{-6} près de la solution à l'équation : $\text{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 1$.

b. Donner une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_1^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.