Corrigé du DM n°15

Exercice : Factorisation d'un polynôme

Soit le polynôme $P = 4X^6 - 12X^5 + 13X^4 - 10X^3 + 6X^2 + 2X - 3 \in \mathbf{R}[X]$.

1. P est de degré 6 et de coefficient dominant 4.
   Dans $\mathbf{C}$, P possède donc 6 racines distinctes ou non.
2. Racine réelle de P. On calcule : $P(1) = 0$ donc 1 est racine de P.
   On s'intéresse à sa multiplicité en calculant $P'(1)$:
   $P' = 24X^5 - 60X^4 + 52X^3 - 30X^2 + 12X + 2$, donc $P'(1) = 0$.
   $P'' = 120X^4 - 240X^3 + 156X^2 - 60X + 12$, donc $P''(1) \neq 0$. $\boxed{\text{1 est racine de } P\text{, de multiplicité 2.}}$
3. Une racine complexe.
   On calcule : $P(i) = 4i^6 - 12i^5 + 13i^4 - 10i^3 + 6i^2 + 2i - 3$
   $= -4 - 12i + 13 + 10i - 6 + 2i - 3$ donc $P(i) = 0$. $\boxed{i \text{ est racine de } P.}$
   Puisque P est à coefficients réels, son conjugué $\bar{i} = -i$ est aussi racine de P.
4. Factorisation de P.
   Vu ce qui précède, P se factorise par $(X-1)^2$ et par $(X-i)(X+i) = X^2+1$.
   On peut donc écrire : $P = (X-1)^2(X^2+1)Q$, où Q est un polynôme de degré 2.
   En considérant le coefficient dominant de P, et son terme constant, on peut écrire : $Q = 4X^2 + bX - 3$.
   Dans $(X^2-2X+1)(X^2+1)(4X^2+bX-3)$, on cherche le monôme de degré 5 : on trouve $(b-8)X^5$.
   Par identification avec P, on a : $b - 8 = -12$ donc $b = -4$.
   Enfin, $Q = 4X^2 - 4X - 3$ a pour discriminant $\Delta = 64 > 0$ et pour racines réelles $\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$.
   Ainsi : $\boxed{P = 4(X-1)^2(X^2+1)(X-\tfrac{3}{2})(X+\tfrac{1}{2}) \text{ dans } \mathbf{R}[X],}$
   et $\boxed{P = 4(X-1)^2(X-i)(X+i)(X-\tfrac{3}{2})(X+\tfrac{1}{2}) \text{ dans } \mathbf{C}[X].}$
5. $\boxed{P \text{ est scindé dans } \mathbf{C}[X] \text{ (comme tout polynôme non nul), mais pas dans } \mathbf{R}[X].}$

Problème : Une suite de polynômes : $\begin{cases} P_0 = 2 \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbf{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$

1. $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$ puis $P_3 = XP_2 - P_1 = X(X^2-2) - X = X^3 - 3X$,
   et enfin : $P_4 = XP_3 - P_2 = X(X^3-3X) - (X^2-2) = X^4 - 4X^2 + 2$.
   Conclusion : $\boxed{P_2 = X^2 - 2,\ P_3 = X^3 - 3X \text{ et } P_4 = X^4 - 4X^2 + 2.}$
2. On factorise facilement (identité remarquable ou facteur commun) :
   $$\boxed{P_2 = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad P_3 = X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3}).}$$
   On pose $Y = X^2$, de sorte que $P_4 = Y^2 - 4Y + 2$. On calcule $\Delta = 8 > 0$ donc on trouve deux racines réelles distinctes : $y_1 = \dfrac{4+\sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$ et $y_2 = 2 - \sqrt{2}$, toutes deux positives.
   Il vient donc : $P_4 = (X^2 - y_1)(X^2 - y_2) = (X - \sqrt{y_1})(X + \sqrt{y_1})(X - \sqrt{y_2})(X + \sqrt{y_2})$.
   Conclusion : $\boxed{P_4 = \left(X - \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(X + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(X - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(X + \sqrt{2-\sqrt{2}}\right).}$
3. On procède par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose :
   $$\mathcal{P}_n : \ll P_n = X^n + Q_n \text{ où } Q_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X] \gg.$$
   Cette propriété traduit le fait que P_n est unitaire et de degré n.
   • Initialisation-double à partir du rang $n = 1$:
   $P_1 = X = X^1 + 0$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie. $P_2 = X^2 + (-2)$ donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.
   • Hérédité-double à partir du rang $n = 1$: Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies.
   Alors : $P_n = X^n + Q_n$ et $P_{n+1} = X^{n+1} + Q_{n+1}$ avec $\deg(Q_n) \leqslant n-1$ et $\deg(Q_{n+1}) \leqslant n$.

On a alors : $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n = X(X^{n+1} + Q_{n+1}) - (X^n + Q_n)$

$\qquad = X^{n+2} + Q_{n+2}$ en posant $Q_{n+2} = XQ_{n+1} - X^n - Q_n$.

On a : $\deg(Q_{n+2}) \leqslant \deg(Q_{n+1}) + 1 \leqslant n+1$ donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

- D'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie. $\boxed{\forall n \geqslant 1, P_n \text{ est unitaire et } \deg(P_n) = n.}$

4. Soit x un réel non nul. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $\mathcal{Q}_n$:« $P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$ ».

- Initialisations pour $n = 0$ et $n = 1$: $P_0(x) = 2$ et $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2$ donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

$$P_1\left(x + \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x} \text{ donc } \mathcal{Q}_1 \text{ est vraie.}$$

- Hérédité à partir du rang 0 : soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ vraies.

Alors $P_{n+2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right) P_{n+1}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$\qquad = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}\right) - \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)$

$\qquad = x^{n+2} + \dfrac{1}{x} + x^n + \dfrac{1}{x^{n+2}} - x^n - \dfrac{1}{x} = x^{n+2} + \dfrac{1}{x^{n+2}}$. Ainsi, $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie.

- D'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 0$, $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}^\star,\ \forall n \in \mathbf{N},\ P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}.}$

5. Application : On pose $Q = X^4 - 3\sqrt{5}X^3 + 12X^2 - 3\sqrt{5}X + 1$. Soit x une racine réelle de Q.

(a) $Q(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de Q : $\boxed{x \neq 0.}$

$Q(x) = 0$ et $x \neq 0$ donc $\dfrac{Q(x)}{x^2} = 0$, soit : $\boxed{\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\sqrt{5}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 12 = 0.}$

(b) D'après la question **4**, $P_2(t) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ donc $\boxed{P_2(t) - 3\sqrt{5}t + 12 = 0 \quad (1).}$

(c) $(1) \Leftrightarrow (t^2 - 2) - 3\sqrt{5}t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3\sqrt{5}t + 10 = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 5 > 0$ donc on trouve deux solutions réelles distinctes.

$(1) \Leftrightarrow t = \dfrac{3\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ ou $t = \dfrac{3\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$. $\boxed{\mathcal{S}_{(1)} = \left\{\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right\}.}$

(d) $t = x + \dfrac{1}{x}$ donc on peut écrire deux équations d'inconnue $x \neq 0$:

$*\ x + \dfrac{1}{x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$, $\Delta = 1$ et $x = \dfrac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$;

$*\ x + \dfrac{1}{x} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$, $\Delta = 16$ et $x = \dfrac{2\sqrt{5} \pm 4}{2} = \sqrt{5} \pm 2$.

$\boxed{Q \text{ possède 4 racines réelles : } x_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\ x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ x_3 = \sqrt{5}+2,\ x_4 = \sqrt{5}-2.}$

(e) Forme factorisée : $\boxed{Q = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)}$, car Q est unitaire et de degré 4.

6. Traitement informatique

(a)
```
def mult(L,a) :
    M = []
    for elt in L : M.append(a*elt)
    return M
```

(b)
```
def decale(L) :
    return [0] + L
```

(c)
```
def somme(L1, L2) :
    n1, n2 = len(L1), len(L2)
    N, M = max(n1,n2), []
    for k in range(N) :
        if k >= n1 : M.append(L2[k])
        elif k >= n2 : M.append(L1[k])
        else : M.append(L1[k]+L2[k])
    return M
```

(d)
```
def P(n) :
    L0, L1 = [2], [0,1]
    for k in range(n) :
        L2 = somme(decale(L1),mult(L0,-1))
        L1, L0 = L2, L1
    return L0
```