Devoir Maison n°16

Exercice : Étude d'une application linéaire

Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (y+z,\ x+y+z,\ x) \end{cases}$

1. Donner les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$,
   et écrire la matrice A canoniquement associée à l'application f.
2. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
   f est-elle injective ? surjective ?
3. Soient $u = (0,-1,1)$, $v = (1,0,-1)$ et $w = (2,3,1)$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   On notera P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
4. Calculer $f(u), f(v)$ et $f(w)$.
5. En déduire $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
6. Pour $n \in \mathbf{N}$, déterminer $(A')^n$.
7. Donner une relation entre A, A' et P.
8. En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^\star$, l'expression de A^n, puis l'image par f^6 de $(1,0,0)$.
9. Traitement informatique : écrire en langage *Python* en fonction `composee(u,n)` prenant pour arguments un entier $n > 0$ et une liste `u` représentant un vecteur $u = (x,y,z)$ de $\mathbf{R}^3$, et renvoyant la liste `v` représentant l'image de u par la composée $n^{\text{ème}}$ de f : $v = f^n(u)$.

* * *