I Continuité de $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$

1. Cadre de l'étude
2. Pavés de $\mathbf{R}^2$
3. Nappe d'une fonction de 2 variables
4. Distance et limites dans $\mathbf{R}^2$ ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Continuité ($\rightarrow$ *Annexe*)
6. Fonctions partielles ($\rightarrow$ *Annexe*)
7. Courbes de niveau ($\rightarrow$ *Annexe*)

II Dérivées partielles

1. Définition ($\rightarrow$ *Annexe*)
2. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$
3. Le gradient ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Approximation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ($\rightarrow$ *Annexe*)
5. Dérivée d'une composée ($\rightarrow$ *Annexe*)

III Applications

1. Plan tangent à une surface
2. Courbe de niveau et gradient
3. Extréma locaux

IV Dérivées d'ordre supérieur

1. Définition
2. Fonction de classe $\mathcal{C}^k$
3. Théorème de Schwarz ($\rightarrow$ *Annexe*)
4. Approximation d'ordre 2 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ ($\rightarrow$ *Annexe*)

Annexes

1.4a Distance dans $\mathbf{R}^2$: $*$ Distance entre les couples (x,y) et (x',y') de $\mathbf{R}^2$: $d = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$

$*$ Norme d'un couple (x,y) : $||(x,y)|| = d((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2}$

1.4b Limites dans $\mathbf{R}^2$: $*$ $(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)$ dans $\mathbf{R}^2$ $\Leftrightarrow$ $d\big((x,y),(x_0,y_0)\big) \longrightarrow 0$ dans $\mathbf{R}_+$.

$*$ $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f = (a,b) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f,\ d\big((x,y),(x_0,y_0)\big) < \alpha \Rightarrow d\big(f(x,y),(a,b)\big) < \varepsilon.$

1.5 Continuité : f est continue en (x_0,y_0) lorsque $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

1.6 Fonctions partielles : I et J sont deux intervalles réels, $f : D = I \times J \to \mathbf{R}^2$, et $(x_0,y_0) \in D$.

Première fonction partielle de f associée à (x_0,y_0) : $f_1 : \begin{cases} I \to \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x,y_0) \end{cases}$

Deuxième fonction partielle de f associée à (x_0,y_0) : $f_2 : \begin{cases} J \to \mathbf{R} \\ y \mapsto f(x_0,y) \end{cases}$

1.7 Courbes de niveau : La courbe de niveau $z_0 \in \mathbf{R}$ est l'intersection de la nappe représentant f avec le plan horizontal d'équation $z = z_0$.

2.1 Dérivées partielles :

- Première dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} D \to \mathbf{R} \\ (x,y) \mapsto \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \end{cases}$

- Seconde dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y} : \begin{cases} D \to \mathbf{R} \\ (x,y) \mapsto \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} \end{cases}$

2.3 Gradient : Gradient de f en (x,y) : $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \nabla f(x,y)$.

2.4 Approximation d'ordre 1 : Soit $f : D \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors :

$$f(x+h,y+k) \underset{h,k\to 0}{=} f(x,y) + h \times \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \mathrm{o}(h,k)$$

2.5 Dérivée d'une composée : $f : I \times J \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, u, v dérivables sur $K \subset \mathbf{R}$ et à valeurs respectivement dans I et dans J.

Alors $g : t \mapsto f\big(u(t),v(t)\big)$ dérivable sur K, et : $g'(t) = u'(t) \times \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(u(t),v(t)\big) + v'(t) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(u(t),v(t)\big)$

4.3 Théorème de Schwarz : Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, alors $\forall (x,y) \in D$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Si f est de classe C^k sur D, alors les dérivées partielles d'ordre k commutent.

4.4 Approximation d'ordre 2 : Soit $f : D \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, alors :

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} & f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ & + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) + \mathrm{o}\left(||(h,k)||^2\right). \end{aligned}$$