DS n°8, mathématique

Durée : 1 heure 55
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet est constitué de deux exercices indépendants.

Exercice 1 : polynômes *(temps conseillé : 45 minutes)*

On définit le polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ par : $P = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 6X + 5$.

1. Trouver une racine réelle α de P, et étudier sa multiplicité.
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbf{R}[X]$, puis dans $\mathbf{C}[X]$.
3. Déterminer, puis factoriser entièrement le polynôme dérivé P'.

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.
On pose : $Q_n = (X-1)^n P + \lambda_n \left(P'\right)^n$, où λ_n désigne un réel qu'on précisera plus tard.

4. On suppose ici que $\lambda_n \neq 0$. Étudier le degré de Q_n selon les valeurs de $n \geqslant 1$.
5. Montrer que α est racine de Q_n. Que dire de sa multiplicité ?
6. Déterminer un réel β racine de Q_n de multiplicité au moins n.
7. On veut : $\forall n \geqslant 1,\ Q_n(0) = 0$. Déterminer dans ce cas λ_n, et vérifier que $\lambda_n \neq 0$.
8. En déduire alors que : $\forall n \geqslant 2,\ X(X-\alpha)^2(X-\beta)^n \mid Q_n$.

Exercice 2 : Étude d'une application linéaire *(temps conseillé : 1 h 10)*

On définit la fonction $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ par l'expression :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ f(x,y,z) = (-x+2y+2z,\ 2x-y+2z,\ 2x+2y-z)$$

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$: $\mathcal{C} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$.
On note A la matrice de f relativement à la base canonique : $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

1. Justifier rapidement que $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. En déduire que f est bijective, et préciser dans ce cas l'image de f.
4. Écrire la matrice A, puis calculer A^2.
5. En déduire une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $AB = I_3$, où I_3 désigne la matrice-identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
6. Retrouver le résultat de la question **3**, et préciser l'expression de $f^{-1}(x,y,z)$ pour tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, où f^{-1} désigne la bijection réciproque de f.

Dans cette question, on utilise la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

7. (a) Exprimer simplement A à l'aide des matrices U et I_3.
   (b) Calculer U^2, et l'exprimer en fonction de U.
   (c) En déduire A^2, et comparer au résultat de la question **4**.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère les vecteurs : $u = (1,1,1)$, $v = (-1,1,0)$, $w = (-1,0,1)$.
On note $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$, et P la matrice de $\mathcal{B}$ relativement à la base canonique.

8. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
9. Comment, dans ce cas, s'appelle la matrice P ?
10. Calculer $f(u), f(v)$ et $f(w)$.
11. En déduire la matrice A' de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
12. Exprimer A en fonction de P et A'.
13. Calculer $(A')^2$, et à l'aide de la question précédente, retrouver le résultat de la question **4**.

Fin du sujet