Corrigé du DS n°8

Exercice 1 : Polynômes

1. $\alpha = -1$ est racine évidente de P car $P(-1) = 0$.
   On détermine $P' = 4X^3 - 6X^2 - 4X + 6$ et on calcule $P'(-1) = 0$.
   On détermine $P'' = 12X^2 - 12X - 4$ et on calcule $P''(-1) \neq 0$, donc $\boxed{\alpha = -1 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } 2.}$
2. D'après la question **1**, $P = (X+1)^2 R$ avec $R \in \mathbf{R}[X]$ de degré $4 - 2 = 2$, donc $R = aX^2 + bX + c$.
   Par examen des coefficitients dominants, $a = 1$ et par examen des coefficients constants, $c = 5$.
   On a donc : $P = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 6X + 5 = (X^2 + 2X + 1)(X^2 + bX + 5)$.
   En comparant les coefficients d'ordre 1 : $6 = 10 + b$ donc $b = -4$. Ainsi, $R = X^2 - 4X + 5$.
   $\Delta_R = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$ donc R ne se factorise pas dans $\mathbf{R}[X]$.
   $\boxed{\text{La factorisation réelle de } P \text{ est : } P = (X+1)^2(X^2 - 4X + 5).}$
   Dans $\mathbf{C}$, R possède 2 racines conjuguées : $\dfrac{-(-4) \pm i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 1} = 2 \pm i$.
   $\boxed{\text{La factorisation complexe de } P \text{ est : } P = (X+1)^2(X - 2 - i)(X - 2 + i).}$
3. On a vu que $\boxed{P' = 4X^3 - 6X^2 - 4X + 6}$, et que $\alpha = -1$ est racine simple de P'.
   Ainsi $P' = (X+1)S$ avec $\deg(S) = 2$. Comme précédemment, on trouve : $S = 4X^2 + \mu X + 6$
   et l'examen du terme de degré 1 donne : $-4 = 6 + \mu$ donc $\mu = -10$.
   $S = 4X^2 - 10X + 6$ de discriminant $\Delta_S = (-10)^2 - 4 \times 4 \times 6 = 4 > 0$.
   On trouve les deux racines réelles de S : $\dfrac{10 \pm \sqrt{4}}{8} = \dfrac{3}{2}$ et 1. Ainsi $S = 4(X - \frac{3}{2})(X - 1)$
   et en conlusion : $\boxed{P' = 4(X+1)(X - \frac{3}{2})(X - 1).}$ P' est scindé dans $\mathbf{R}[X]$, sa factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ est la même.
4. $\ast$ Si $n = 1$, alors $\deg\big((X-1)P\big) = 1 + \deg(P) = 5$ et $\deg(\lambda_n P') = \deg(P') = 3 \neq 5$
   donc le degré de la somme est le maximum des degrés : $\boxed{\deg(Q_1) = 5.}$
   $\ast$ Si $n = 2$: $\deg\big((X-1)^2 P\big) = 2 + \deg(P) = 6 = \deg(\lambda_n (P')^2)$ et le degré de la somme est inférieur au maximum des degrés : $\boxed{\deg(Q_2) \leqslant 6.}$
   $\ast$ Si $n \geqslant 3$, alors $\deg\big((X-1)^n P\big) = n + \deg(P) = n + 4$ et $\deg(\lambda_n (P')^n) = 3n$
   avec $3n > n+4$ car $n \geqslant 3$, donc le degré de la somme est le maximum des degrés : $\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \deg(Q_n) = 3n.}$
5. $\alpha = -1$ est racine de P et de P' donc $Q_n(-1) = (-2)^n P(-1) + \lambda_n P'(-1)^n = 0$ $\boxed{-1 \text{ est racine de } Q_n.}$
   $P = (X+1)^2 R$ et $P' = (X+1)S$ donc
   $$\begin{aligned} Q_n &= (X-1)^n (X+1)^2 R + \lambda_n (X+1)^n S^n \\ &= (X+1)^2 \left[(X-1)^n R + \lambda_n (X+1)^{n-2} S^n\right] \text{ si } n \geqslant 2 \end{aligned}$$
   donc $\boxed{\text{si } n \geqslant 2, \text{ alors } -1 \text{ est racine de } Q_n \text{ de multiplicité au moins } 2.}$
6. $$\begin{aligned} Q_n = (X-1)^n P + \lambda_n \big(4(X+1)(X - \tfrac{3}{2})(X-1)\big)^n &= (X-1)^n \left[P + 4^n \lambda_n (X+1)^n (X - \tfrac{3}{2})^n\right] \\ &= (X - \beta)^n T \quad \text{avec } T \in \mathbf{R}[X] \end{aligned}$$
   donc $\boxed{\beta = 1 \text{ est racine de } Q_n \text{ de multiplicité au moins } n.}$
7. $Q_n(0) = 0 \Leftrightarrow (-1)^n P(0) + \lambda_n P'(0)^n = 0 \Leftrightarrow 5(-1)^n + 6^n \lambda_n = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda_n = -\dfrac{5(-1)^n}{6^n} \neq 0.}$
8. Pour cette valeur de λ_n, et si $n \geqslant 2$, on a :
   • $\alpha = -1$ est racine au moins double de Q_n
   • $\beta = 1$ est racine de Q_n de multiplicité $\geqslant n$
   • $\gamma = 0$ est racine de Q_n car $Q_n(0) = 0$
   Q_n se factorise alors par $(X - \alpha)^2 (X - \beta)^n (X - \gamma)$, donc $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ X(X+1)^2(X-1)^n \,|\, Q_n.}$

$\boxed{\textbf{Exercice 2 : Étude d'une application linéaire}}$

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ car les coordonnées de $f(x,y,z)$ sont des combinaisons linéaires de x,y,z.

2. On résout $f(x,y,z)=(0,0,0)$: $\begin{cases} -x+2y+2z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+2z=0 \\ 3y+6z=0 \\ 6y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+2z=0 \\ y+2z=0 \\ -9z=0 \end{cases}$

   Ce système est de rang 3 donc de Cramer, et homogène donc admet comme unique solution le triplet $(0,0,0)$. $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,0)\}.}$

3. $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,0)\}$ donc f est injective. Puisque f est un endomorphisme en dimension finie, on a f injective $\Leftrightarrow$ f bijective, donc $\boxed{f \text{ est bijective.}}$ En particulier, f est surjective donc $\boxed{\mathrm{Im}(f)=\mathbf{R}^3.}$

4. $f(1,0,0)=(-1,2,2)$, $f(0,1,0)=(2,-1,2)$ et $f(0,0,1)=(2,2,-1)$ donc par définition :

   $\boxed{A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$ On calcule ensuite $\boxed{A^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}.$

5. On trouve à la question **4** que $A^2=9I_3$, donc $\dfrac{1}{9}A^2=I_3$, soit $AB=I_3$ en posant $\boxed{B=\dfrac{1}{9}A.}$

6. A est donc inversible, d'inverse B, donc $\underline{f \text{ est bijective}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f^{-1})=A^{-1}=B$ donc $\boxed{f^{-1}=\dfrac{1}{9}f.}$

   On précise : $\forall (x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ f^{-1}(x,y,z)=\left(-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{2}{9}y+\dfrac{2}{9}z, \dfrac{2}{9}x-\dfrac{1}{9}y+\dfrac{2}{9}z, \dfrac{2}{9}x+\dfrac{2}{9}y-\dfrac{1}{9}z\right)$

7. (a) On a la relation : $\boxed{A=2U-3I_3.}$

   (b) $U^2=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{U^2=3U.}$

   (c) $A^2=(2U-3I_3)^2=4U^2-12U+9I_3$ car U et I_3 commutent ($UI_3=U=I_3U$)

   $=4(3U)-12U+9I_3$ donc $\boxed{A^2=9I_3.}$ On retrouve le résultat du **4**.

8. $\mathrm{rg}(P)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}=3$

   On trouve pour la famille $\mathcal{B}$: $r=3$, $p=\mathrm{card}(\mathcal{B})=3$ et $n=\dim(\mathbf{R}^3)=3$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

9. La matrice P est donc <u>la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.</u>

10. On calcule : $f(u)=f(1,1,1)=(3,3,3)$
    $f(v)=f(-1,1,0)=(3,-3,0)$
    $f(w)=f(-1,0,1)=(3,0,-3)$

11. On remarque que : $f(u)=3u$, $f(v)=-3v$ et $f(w)=-3w$ donc par définition : $\boxed{A'=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$

12. D'après la formule de changement de bases : $A'=P^{-1}AP$ donc $\boxed{A=PA'P^{-1}.}$

13. $A'=\mathrm{Diag}(3,-3,-3)$ donc $(A')^2=\mathrm{Diag}(3^2,(-3)^2,(-3)^2)=\mathrm{Diag}(9,9,9)$ soit : $\boxed{(A')^2=9I_3.}$

    On a donc : $A^2=\left(PA'P^{-1}\right)^2=P(A')^2P^{-1}=P(9I_3)P^{-1}=9PP^{-1}$ donc $\boxed{A^2=9I_3.}$