Exercice 9 : Une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$

1) Matrice de f dans les bases canoniques $\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

où $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_2$ désignent les bases canoniques respectivement de $\mathbf{R}^3$ et de $\mathbf{R}^2$.

2) Expression de f dans de nouvelles bases

On étudie $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_3}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: elle est de rang 3 donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3}$.

On étudie $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_2}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: elle est de rang 2 donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbf{R}^2}$.

Relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a : $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = Q^{-1}AP$.

On peut calculer, avec $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

Autre méthode :
A' est la matrice obtenue en écrivant en colonnes les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ des images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

On a : $f(u_1) = f(1,0,1) = (0,0) = 0.v_1 + 0.v_2$ (première colonne)
$f(u_2) = f(1,1,0) = (3,0) = 3.v_1 + 0.v_2$ (deuxième colonne)
$f(u_3) = f(1,1,1) = (2,1) = 1.v_1 + 1.v_2$ (troisième colonne)

Exercice 10 : Un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

1) $\mathcal{B}' = (u,v,w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$

Nommons $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$. Soit P la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons si P est inversible :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

donc P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ceci montre que $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$

2) Changement de bases

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(1,1,-1)$, après calculs.

Autre méthode : $f(u) = f(e_3) = e_3 = u$ $\qquad f(u) = 1.u + 0.v + 0.w$
$f(v) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = -e_2 - (-e_1) = e_1 - e_2 = v$ $\qquad f(v) = 0.u + 1.v + 0.w$
$f(w) = f(e_1+e_2) = f(e_1)+f(e_2) = -e_2+(-e_1) = -(e_1+e_2) = -w$ $\qquad f(w) = 0.u+0.v+(-1).w$

3) Matrice de la composée $n^{\text{ème}}$ f^n

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n) = (A')^n$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n) = \mathrm{Diag}(1,1,(-1)^n).}$

4) Retour à la base $\mathcal{B}$: $A' = P^{-1}AP$ donc $A = PA'P^{-1}$ et par récurrence immédiate, on obtient :

$$A^n = P\,(A')^n\,P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(1,1,(-1)^n)P^{-1}.$$

Après calculs : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & -1+(-1)^n & 0 \\ -1+(-1)^n & 1+(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$

Remarque : Pour $n = 0$, on doit trouver I_3, et pour $n = 1$, on doit retrouver la matrice A.

Remarque 2 : La matrice A est ici très simple. On peut calculer à la main A^2, A^3 et deviner la formule pour A^n, qu'on démontre ensuite par récurrence.

Exercice 11 : Un endomorphisme de $\mathbf{R}^4$.

1) f est bijectif : $A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-1} & 1 & -3 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de rang 4, donc inversible.

2) Ensemble des vecteurs invariants par f :

$F = \{u \in \mathbf{R}^4,\ f(u) = u\}$ est le noyau de l'endomarphisme $f - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^4}$, c'est donc un s-ev de $\mathbf{R}^4$.

$$u = xb_1 + yb_2 + zb_3 + tb_4 \in F \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z - 3t = x \\ x + z - 3t = y \\ z - 2t = z \\ -t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + z \\ t = 0 \end{cases}$$

donc $F = \{xb_1 + (x+z)b_2 + zb_3 \in \mathbf{R}^4,\ x, z \in \mathbf{R}\} = \{x(b_1 + b_2) + z(b_2 + b_3),\ x, z \in \mathbf{R}\}$

On pose $u_1 = b_1 + b_2$ et $u_2 = b_2 + b_3$. On vient d'écrire : $\boxed{F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).}$

Puisque u_1, u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une base de F, donc $\boxed{\dim(F) = 2.}$

3) $G = \{u \in \mathbf{R}^4,\ f(u) = -u\}$

G est le noyau de l'endomorphisme $f + \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^4}$ donc c'est un s-ev de $\mathbf{R}^4$.

$$u = xb_1 + yb_2 + zb_3 + tb_4 \in G \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z - 3t = -x \\ x + z - 3t = -y \\ z - 2t = -z \\ -t = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2t \\ x + y = 2t \\ z = t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

On pose $v = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ et on a : $u \in G \Leftrightarrow u = tv,\ t \in \mathbf{R}$ donc $\boxed{G = \mathrm{Vect}(v) \text{ et } \dim(G) = 1.}$

4) Une nouvelle base de $\mathbf{R}^4$, adaptée à f

On pose $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, v, b_1)$. La matrice de la famille $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$

C'est une matrice carrée de rang 4, donc inversible : $\boxed{\mathcal{B}_1 \text{ est une base de } \mathbf{R}^4.}$

P est donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$.

5) Matrice de f dans $\mathcal{B}_1$

$u_1, u_2 \in F$ donc $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$.
$v \in G$ donc $f(v) = -v$.
Reste à calculer $f(b_1) = 2b_1 + b_2$, et à l'exprimer en fonction de u_1, u_2, v, b_1.
On peut remarquer que $u_1 + b_1 = 2b_1 + b_2 = f(b_1)$.
Si on ne le voit pas, on résout un système : $2b_1 + b_2 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma v + \delta b_1$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

6) Matrice de la bijection réciproque f^{-1} : il s'agit d'inverser la matrice A_1, et on trouve :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f^{-1}) = (A_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$