

Contexte

On veut montrer le plus simplement possible qu'il existe une unique fonction f définie et dérivable sur \mathbf{R} telle que :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

C'est un cas particulier d'un problème plus général, appelé *problème de Cauchy*, et qui trouve une solution grâce au **théorème de Cauchy-Lipschitz**.

Existence

Soit $x \in \mathbf{R}$. On définit la suite $(u_n(x))_n$ par : $\forall n \geq 1, u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. $\forall h > -1, \forall x > -n, u_{n+1}(x+h) \geq (1+h)u_n(x)$

preuve : soit $h > -1$. On pose pour $x > -n$: $\varphi_n(x) = \frac{u_{n+1}(x+h)}{u_n(x)}$.

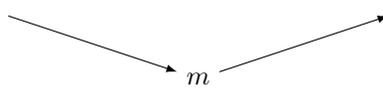
Alors φ_n est dérivable par opérations sur $] -n, +\infty[$ et :

$$\forall x > -n, \varphi'_n(x) = \frac{\left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}}{u_n^2(x)}$$

en appliquant la formule de dérivée d'un quotient, et de la puissance d'une fonction.

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \varphi'_n(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right) \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{n} - \frac{x+h}{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(n+1) - n(x+h)}{n(n+1)} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq nh \end{aligned}$$

On obtient donc le tableau de variations suivant pour φ_n :

x	$-n$	nh	$+\infty$
$\varphi'_n(x)$	$-$	0	$+$
φ_n			

φ_n admet donc en nh un minimum $m = \varphi_n(nh) = \frac{(1+h)^{n+1}}{(1+h)^n} = 1+h$.

Ainsi, $\forall x > -n, \varphi_n(x) \geq 1+h$, donc $\frac{u_{n+1}(x+h)}{u_n(x)} \geq 1+h$, d'où le résultat.

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite $(u_n(x))_n$ est convergente.

preuve : soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Soit N un entier tel que $N > |x|$. On a donc : $x > -N$ et $-x > -N$.

On applique 1) à partir du rang N , avec $h = 0$, pour x et pour $-x$:

$$\forall n \geq N, \begin{cases} u_{n+1}(x) \geq u_n(x) \\ u_{n+1}(-x) \geq u_n(-x) \end{cases}$$

Les suites $(u_n(x))_n$ et $(u_n(-x))_n$ sont donc croissantes à partir du rang N .

De plus, $u_n(x) \times u_n(-x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \times \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$

donc : $\forall n \geq N, u_n(x) \leq \frac{1}{u_n(-x)} \leq \frac{1}{u_N(-x)}$ donc $(u_n(x))_n$ est majorée.

Toute suite croissante et majorée converge, donc on a le résultat.

3. On définit : $\forall x \in \mathbf{R}, \exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$. On a alors : $\exp(0) = 1$.

preuve : c'est immédiat car : $\forall n \geq 1, u_n(0) = 1$.

4. $\forall h \in]-1, 1[, \forall x \in \mathbf{R}, h \exp(x) \leq \exp(x+h) - \exp(x) \leq \frac{h}{1-h} \exp(x)$

preuve : soit $h \in]-1, 1[$. D'après **1**), $\forall n > -x, (1+h)u_n(x) \leq u_{n+1}(x+h)$

Donc par passage à la limite, on obtient : $(1+h)\exp(x) \leq \exp(x+h)$

donc : $h \exp(x) \leq \exp(x+h) - \exp(x)$, ce qui est la première inégalité.

Puisque $h \in]-1, 1[$, alors $-h \in]-1, 1[$ donc : $-h \exp(x) \leq \exp(x-h) - \exp(x)$.

On applique cette nouvelle inégalité à $x+h$: $-h \exp(x+h) \leq \exp(x) - \exp(x+h)$

On en déduit : $(1-h)\exp(x+h) \leq \exp(x)$ donc : $\exp(x+h) \leq \frac{1}{1-h} \exp(x)$

puis : $\exp(x+h) - \exp(x) \leq \frac{1}{1-h} \exp(x) - \exp(x) = \left(\frac{1}{1-h} - 1\right) \exp(x)$

soit : $\exp(x+h) - \exp(x) \leq \frac{h}{1-h} \exp(x)$ ce qui est la deuxième inégalité.

5. \exp est dérivable sur \mathbf{R} , et $\exp' = \exp$.

preuve : on se sert de la définition.

Le taux d'accroissement de \exp en x est : $\Delta_{\exp}(x)(h) = \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$ pour $h \neq 0$.

Vu ce qui précède ($h > 0$) : $\exp(x) \leq \Delta_{\exp}(x)(h) \leq \frac{1}{1-h} \exp(x)$.

On fait tendre h vers 0 et on utilise le théorème d'encadrement (des gendarmes) :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \Delta_{\exp}(x)(h) = \exp(x).$$

On peut faire de même pour $h \rightarrow 0^-$, en faisant attention au sens des inégalités.

On en déduit que \exp est dérivable en x , et que $\exp'(x) = \exp(x)$.

Unicité

6. Propriété : $\forall x \in \mathbf{R}, \exp(x) > 0$.

preuve : soit f une fonction répondant au problème initial : $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On pose $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$, définie et dérivable (par opérations) sur \mathbf{R} .

$\forall x \in \mathbf{R}, \Phi'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x))$ en utilisant la dérivée d'un produit et d'une composée.

Mais puisque $f' = f$, on peut simplifier : $\forall x \in \mathbf{R}, \Phi'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.

D'après le **théorème des accroissements finis (TAF)**, on en déduit que Φ est constante sur l'intervalle \mathbf{R} .

Or, $\Phi(0) = f(0)f(-0) = 1 \times 1 = 1$ donc : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x)f(-x) = 1$.

Ainsi, f ne s'annule pas sur \mathbf{R} .

Étant continue (car dérivable), elle conserve un signe constant. Puisque $f(0) > 0$, on a le résultat.

7. La fonction \exp est **l'unique** solution du problème initial.

Soient f et g deux solutions du problème. On pose $\psi = \frac{g}{f}$.

ψ est bien définie (car f ne s'annule pas) et dérivable sur \mathbf{R} par opérations.

On a : $\psi' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{gf - gf}{f^2} = 0$ car $f' = f$ et $g' = g$.

Toujours grâce au **TAF**, cela prouve que ψ est constante sur \mathbf{R} .

Mais $\psi(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$ donc : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = g(x)$. L'unicité est donc démontrée.