TD φ 9 – Description et paramétrage du mouvement d'un point

Relier cours et exercices

Capacités et compétences du cours ...	... à appliquer dans ...
▸ Exprimer, à partir d'un schéma, le déplacement élémentaire et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes.	▸ Exercice nº 1
▸ Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes.	▸ Exercices nº 1, 2, 3, 4 et 5
▸ Établir l'expression de la vitesse et de la position en fonction du temps.	▸ Exercices nº 2, 3, 4 et 5
▸ Obtenir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.	▸ Exercices nº 1 et 4

Savoir appliquer son cours

Exercice nº 1 : Mouvement parabolique ★

Une particule évolue dans un plan repéré par des coordonnées cartésiennes. L'équation horaire de son mouvement est :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{v_0}{t_0} t^2 \end{cases}$$

où $v_0 = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $t_0 = 1\,\mathrm{s}$ sont des constantes.

1. Déterminer la trajectoire du mouvement. La tracer pour $-1\,\mathrm{s} \leq t \leq 1\,\mathrm{s}$.
2. Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération de la particule. Représenter ces vecteurs sur la trajectoire pour $t_1 = -1\,\mathrm{s}$, $t_2 = 0\,\mathrm{s}$ et $t_3 = 0{,}5\,\mathrm{s}$ et en respectant une échelle à choisir.

Exercice nº 2 : Test d'accélération d'une voiture ★

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

1. Elle est chronométrée à $26{,}6\,\mathrm{s}$ au bout d'une distance $D = 180\,\mathrm{m}$. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D.
2. Quelle est alors la distance d'arrêt pour une décélération de $7\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$?

Exercice nº 3 : Attention à l'accident ★★

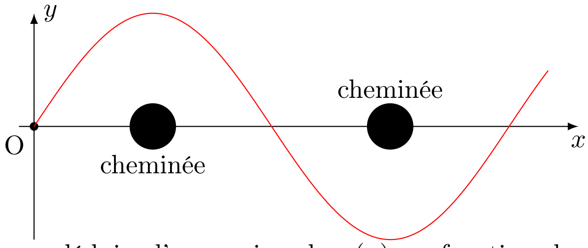
Sur une route limitée à la vitesse v_0 débouche à $x = 0$ et $t = 0$, un tracteur roulant à la vitesse v_1 et se dirigeant selon $+\vec{u}_x$. La voiture qui le suit à vitesse v_0, située à $t = 0$ à l'abscisse $x = -d$, freine avec une accélération constante de module a jusqu'à la vitesse v_1.

1. Qu'appelle-t-on mouvement rectiligne uniforme et mouvement rectiligne uniformément varié ?
2. Quelles sont les équations horaires du tracteur et de la voiture $x_\mathrm{T}(t)$ et $x_\mathrm{V}(t)$?
3. Quelle doit être, en fonction de v_0, v_1 et d, la valeur maximale de a pour éviter le choc ?
4. Faire l'application numérique pour $v_1 = 40\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_0 = 70\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ et $d = 100\,\mathrm{m}$. Calculer alors numériquement Δt_max, le temps nécessaire à la voiture pour passer de v_0 à v_1 et la distance parcourue.

S'entraîner

Exercice n° 4 : *Star Wars : L'Attaque des clones* ★★

Dans cet épisode de *Star Wars*, on assiste à une course poursuite de « *speeder* » entre des cheminées d'usine. On suppose que le véhicule suit une trajectoire sinusoïdale entre les cheminées alignées selon l'axe (Ox). Elles sont séparées d'une distance $L = 200\,\text{m}$.



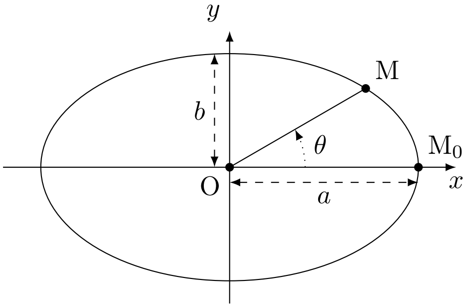
1. D'après l'énoncé, la trajectoire est une sinusoïde, en déduire l'expression de $y(x)$ en fonction de L et de l'amplitude a.
2. Le véhicule conserve une vitesse v_0 constante selon (Ox) et met $t_\text{t} = 12\,\text{s}$ pour revenir sur l'axe après la sixième cheminée. En déduire la vitesse v_0 littéralement et numériquement.
3. Déterminer l'amplitude de la sinusoïde pour que l'accélération reste inférieure à $10g$ en valeur absolue, avec $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Discuter des valeurs obtenues.

Exercice n° 5 : Mouvement sur une ellipse ★★

Un point M se déplace sur une ellipse d'équation cartésienne $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. On note θ l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ avec l'axe (Ox). Les coordonnées du point M peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha\cos(\omega t) \\ y(t) = \beta\sin(\omega t) \end{cases}$$

où l'on suppose que ω est une constante.



1. À $t = 0$, le mobile est en M_0. Déterminer α.
2. En déduire β.
3. Déterminer les composants de la vitesse $(\dot{x}, \dot{y})$ et de l'accélération $(\ddot{x}, \ddot{y})$.
4. Montrer que l'accélération est de la forme $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{\text{OM}}$.

Corrections

Correction de l'exercice n° 2 « Test d'accélération d'une voiture »:

1. Le mouvement est rectiligne à l'accélération constante $\vec{a_0}$. On choisit l'axe (Ox) (de vecteur unitaire $\vec{u}_x$) comme axe du mouvement et le point O comme point de départ. L'intégration de l'accélération donne :
$$\vec{a} = \vec{a_0} = a_0 \vec{u}_x \Rightarrow \vec{v} = (a_0 t + C)\vec{u}_x$$
Or la vitesse initiale ($t = 0$) est nulle donc $C = 0$. L'abscisse en x est alors :
$$x = \frac{a_0 t^2}{2} + C' \text{ or } x(t=0) = 0 \Rightarrow C' = 0$$
On note $t_\mathrm{D} = 26{,}6\,\mathrm{s}$, $a_0 = \dfrac{2D}{t_\mathrm{D}^2} = 5{,}09 \times 10^{-1}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $v_\mathrm{D} = v_0 t_\mathrm{D} = 13{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-}1}$.
2. En phase de freinage, la vitesse initiale est v_D. On note $a_\mathrm{f} = -7\,\mathrm{m\cdot s^{-}2}$ l'accélération lors de cette phase. Ainsi en changeant les origines (nouvelle origine d'espace et nouvelle origine de temps) :
$$v = \dot{x} = a_\mathrm{f} t + v_\mathrm{D} \text{ et } x = \frac{a_\mathrm{f} t^2}{2} + v_\mathrm{D} t$$
L'arrêt a lieu pour $v = 0$ soit $t = t_\mathrm{A} = -\dfrac{v_\mathrm{D}}{a_\mathrm{f}} = 1{,}93\,\mathrm{s}$ d'où une distance de freinage :
$$x(t_\mathrm{A}) = \frac{a_\mathrm{f}}{2}\left(\frac{v_\mathrm{D}}{a_\mathrm{f}}\right)^2 + v_\mathrm{D} \times \left(-\frac{v_\mathrm{D}}{a_\mathrm{f}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{v_\mathrm{D}^2}{a_\mathrm{f}} = 13{,}1\,\mathrm{m}$$

Correction de l'exercice n° 4 « *Star Wars : L'Attaque des clones* »:

1. Avec le repère cartésien proposé, la trajectoire admet pour période spatiale $\lambda = 2L$, ainsi :
$$\boxed{y = a\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$$
2. Selon l'axe (Ox), $\dot{x} = v_0 \Leftrightarrow x(t) = v_0 t$. Le speeder revient sur l'axe après la sixième cheminée soit une distance de $6L$, la vitesse v_0 est donc :
$$v_0 = \frac{6L}{t_t} \overset{\text{A.N.}}{=} 100\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$
3. En remplaçant x par son expression dans y, on obtient :
$$y(t) = a\sin\left(\frac{\pi v_0 t}{L}\right)$$
Ainsi :
$$\begin{cases}\dot{x} = v_0\\ \dot{y} = a\dfrac{\pi v_0}{L}\cos\dfrac{\pi v_0 t}{L}\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\ddot{x} = 0\\ \ddot{y} = -a\left(\dfrac{\pi v_0}{L}\right)^2\sin\dfrac{\pi v_0 t}{L}\end{cases}$$
Par définition, le sinus est inférieur à 1, donc pour que l'accélération soit inférieure à $10g$, alors :
$$\ddot{y} \leq 10g \Leftrightarrow a\left(\frac{\pi v_0}{L}\right)^2 \leq 10g \Leftrightarrow a \leq 10g\left(\frac{L}{\pi v_0}\right)^2 \overset{\text{A.N.}}{=} 40\,\mathrm{m}$$
Le pilote doit être capable de conduire en passant à moins de $40\,\mathrm{m}$ des cheminées à une vitesse selon $\vec{u}_x$ de $360\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ tout en ayant une accélération difficilement supportable pour un être humain non entraîné. Á titre de comparaison, les pilotes d'avions de chasse sont entraînés à supporter une accélération maximale de $9g$ sur des temps relativement courts, de l'ordre 40 à 50 secondes.

Correction de l'exercice n° 5 « Mouvement sur une ellipse »:

1. D'après l'énoncé :
$$x(t=0) = a = \alpha$$
2. On remplace x et y par leurs expressions et on obtient :
$$\cos^2 \omega t + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 \sin^2 \omega t = 1$$
Pour que l'équation soit vérifiée à chaque instant, il est nécessaire que $\beta = b$.
3. Pour obtenir la vitesse et l'accélération, on dérive par rapport à t (ω est constante) :
$$\begin{cases} \dot{x} = -a\omega \sin \omega t \\ \dot{y} = b\omega \cos \omega t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} = -b\omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$
4. On remarque que $\ddot{x} = -\omega^2 x$ et $\ddot{y} = -\omega^2 y$, ainsi :
$$\vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$$