φ 11 : Statique des fluides

Énergie :conversions et transferts

Plan

I Forces volumiques et forces surfaciques **2**
Élement de fluide • Forces volumiques • Forces surfaciques

II Condition d'équilibre d'un fluide dans un champ de pesanteur **3**
Données du problème • Équation différentielle fondamentale de la statique • Propriétés de la pression dans un fluide dans un champ de pesanteur • Démonstration

III Application aux fluides incompressibles **5**
Équation barométrique • Diverses applications

IV Application aux fluides compressibles **7**
Modèle de l'atmosphère isotherme • Facteur de Boltzmann dans le cas de l'atmosphère isotherme

V Forces de pression exercées par un fluide sur un solide **11**
Calcul des forces de pression • Poussée d'Archimède

Documents

TD-φ11

Exercices

Capacités exigibles

Citer des exemples de forces surfaciques ou volumiques.
Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression.
Déterminer l'expression ou la valeur de la résultante des forces de pression sur une surface plane.
Établir la relation $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \pm\rho g$.
Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède
Établir l'expression de la pression en fonction de l'altitude dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
Citer la valeur de la pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer.
Établir l'expression de la pression avec la profondeur dans le cas d'un fluide incompressible.
Interpréter la flottabilité d'une particule de fluide à l'aide des projections verticales du poids et de la poussée d'Archimède.
Identifier quelques phénomènes physiques favorables ou défavorables aux mouvements verticaux de convection dans l'atmosphère ou les océans terrestres.
Construire, par analyse dimensionnelle, les temps caractéristiques associés à ces phénomènes et les comparer.

I Forces volumiques et forces surfaciques

A) Élement de fluide

Définition 1 : Particule de fluide ou élément de fluide

On définit, à l'échelle mésoscopique, un élément de fluide ou une particule de fluide, un volume très petit devant l'échelle macroscopique. Cet élément contient un très grand nombre de molécules de fluides, sa masse $\mathrm{d}m$ est proportionnelle à son volume élémentaire $\mathrm{d}^3\tau$:

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}^3\tau$$

avec ρ la masse volumique.

Dans la suite, on considère une portion de fluide Σ délimitée par une surface $\mathcal{S}$. Soit $\mathcal{V}$ le volume intérieur de cette surface $\mathcal{S}$. Quelles sont les forces qui s'exercent sur cette portion de fluide ?

B) Forces volumiques

Le poids est une force volumique car elle s'exerce sur les éléments de volume $\mathrm{d}^3\tau$ qui constituent tout le volume V. On définit la **densité volumique de force de pensanteur** $\overrightarrow{f}_{\text{pes}}$ telle que :

C) Forces surfaciques

Il existe aussi des forces exercées uniquement sur les molécules les plus proches de la surface S (interaction d'origine électromagnétique et de courte portée) ; Il s'exerce alors une force $\mathrm{d}^2\overrightarrow{F}_p(M)$ sur les molécules très proches d'une surface d^2S_M autour d'un point M de S. $d^2\overrightarrow{F}_p(M)$ est proportionnelle au nombre de molécules mises en jeu donc à l'élément de surface d^2S_M. On parle alors de **force surfacique**.

Dans le cas d'un fluide au repos, $\mathrm{d}^2\overrightarrow{F}_p(M)$ est **orthogonale** à la surface élémentaire d^2S_M et dirigée vers l'intérieur de Σ.

Définition 2 : Vecteur surface élémentaire

On peut alors écrire :

II Condition d'équilibre d'un fluide dans un champ de pesanteur

A) Données du problème

Soit une portion élémentaire de fluide de forme cubique et d'arêtes de taille infinitésimale dx, dy et dz (cf. Figure 1). Cette **particule élémentaire de fluide** de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ est placé dans un champ de pesanteur uniforme. L'axe vertical des altitudes a été choisi positif vers le haut.
Ce système élémentaire de masse élémentaire $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}\tau$ (avec ρ la masse volumique du fluide) est en équilibre (la somme des forces qui s'exerce sur le système est nulle) sous l'action de la pesanteur et des forces de pression exercées par le reste du fluide sur chacune des faces.

B) Équation différentielle fondamentale de la statique

Propriété 1 : Équation fondamentale de la statique des fluides

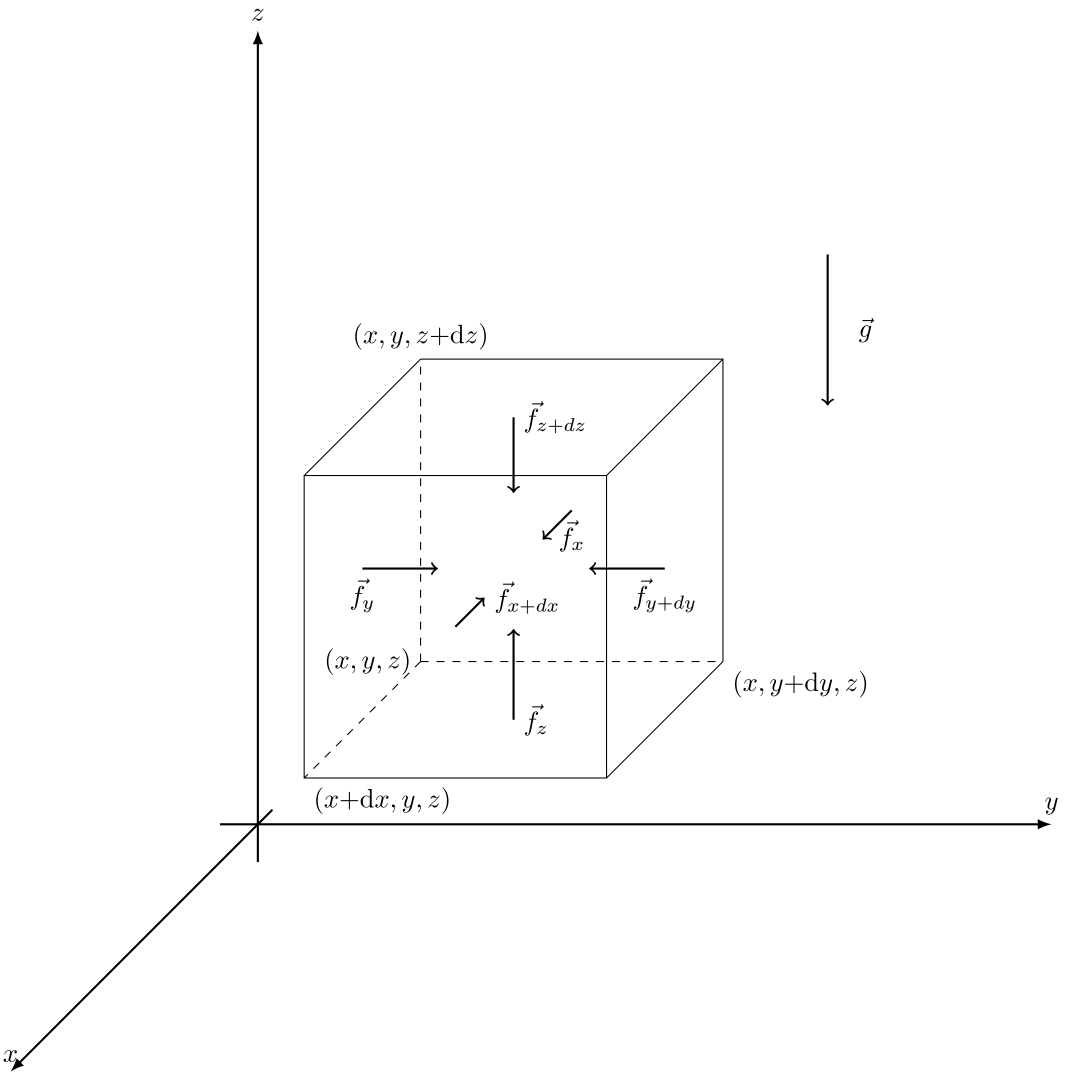


Figure 1 – Volume élémentaire $\mathrm{d}^3\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ de fluide dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme.

C) Propriétés de la pression dans un fluide dans un champ de pesanteur

Théorème 1 : Théorème de Pascal

De même, il est important de noter que la **pression ne présente pas de discontinuité u passage d'un fluide à un autre** : à l'interface, la pression des deux fluides est la même de part et d'autre.

D) Démonstration

III Application aux fluides incompressibles

A) Équation barométrique

Rappel

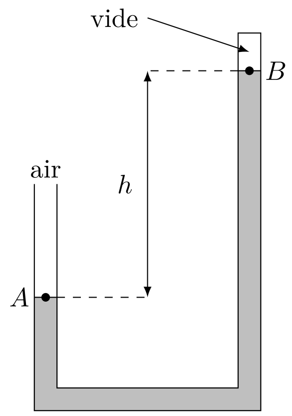
Un fluide incompressible possède une masse volumique uniforme et indépendante de la pression.

Remarque

Le signe « − » du membre de droite permet de montrer que plus l'altitude est élevée et plus la pression est basse. Autrement dit, plus on plonge profond dans un fluide incompressible (typiquement de l'eau) et plus la pression augmente.

B) Diverses applications

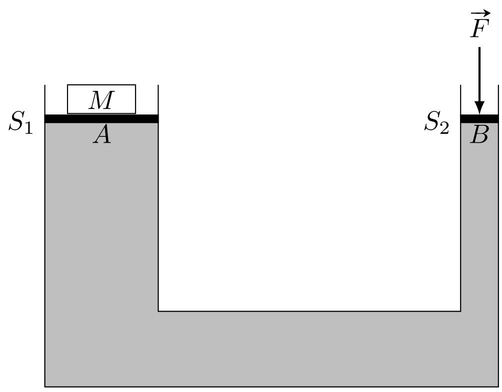
Le baromètre



Remarque

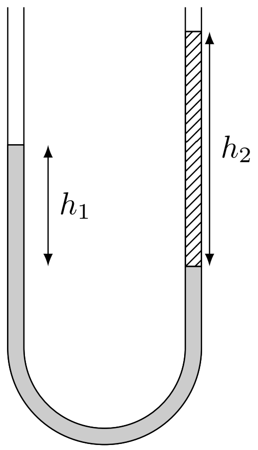
On peut alors lire directement la pression atmosphérique en lisant la dénivellation de mercure, c'est pourquoi il était d'usage de donner la pression en mmHg.
L'utilisation du mercure s'explique par sa très forte masse volumique. Si le baromètre était rempli d'eau, pour une pression de 1.013×10^5 Pa, il faudrait un baromètre de 10 m de haut !

Le verin hydraulique



Exercice 1

Un tube en U contient de l'acide sulfurique et du mercure. Les hauteurs au dessus de la surface commune sont respectivement $h_1 = 2.2\,\text{cm}$ de mercure et $h_2 = 16.2\,\text{cm}$ d'acide sulfurique. La masse volumique du mercure est $13.6\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}$. Calculer la masse volumique de l'acide sulfurique.



IV Application aux fluides compressibles

A) Modèle de l'atmosphère isotherme

Rappel

Un fluide compressible possède une masse volumique non uniforme, dépendante de la pression.

Dans la suite nous supposerons :

- l'atmosphère est constituée d'un gaz parfait de masse molaire moyenne $M(\text{air}) = 29,0\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- l'accélération de pesanteur g est une constante égale (car les altitudes auxquelles nous allons nous intéresser sont négligeables devant le rayon de la Terre) ;
- l'atmosphère est **isotherme**, c'est-à-dire indépendante de l'altitude et uniforme (hypothèses que nous critiquerons en fin de chapitre) ;
- l'air est un fluide compressible, ainsi sa masse volumique $\rho(p)$ dépend de la pression p.

L'objectif de ce paragraphe est de trouver l'évolution de la pression en fonction de l'altitude z de l'atmosphère.

Par analyse dimensionnelle, on obtient immédiatement que $\dfrac{RT}{Mg}$ est homogène à une longueur (une altitude) que nous noterons H (cette grandeur est analogue à τ ou $1/\lambda$ vu au chapitre sur la radioactivité) . Cette épaisseur correspond à une distance caractéristique de l'atmosphère (aussi appelée hauteur d'échelle de l'atmopshère). Ainsi pour ne température de 273 K, on obtient $H = 7,98$ km.
Nous pouvons alors réécrire $p(z)$ comme étant :

On peut considérer qu'il n'y a plus d'atmosphère lorsque la pression est quasi-nulle, c'est-à-dire quand $p(z_{\text{max}}) = \dfrac{p_0}{1000}$:

Exercice 2

Modèle de l'atmosphère pesante

Dans une atmosphère pesante, la masse volumique ρ de l'air, considéré comme gaz parfait, varie avec la pression p suivant la loi :

$$\frac{p}{\rho^\alpha} = \text{constante}$$

(α étant constante supérieure à 1)

1. Établir la loi de variation de la pression p avec l'altitude z.
   Montrer que l'atmosphère a une hauteur finie que l'on exprimera en fonction de ρ_0, p_0 (valeurs à l'altitude zéro de la masse volumique et de la pression), α et g (intensité de la pesanteur).
2. Comment varie la température avec l'altitude ?
   A.N. : $p_0 = 1$ atm ; $\rho_0 = 1,3\text{kg} \cdot \text{m}^3$; $\alpha = 1{,}4$. Calculer l'épaisseur de l'atmosphère.

B) Facteur de Boltzmann dans le cas de l'atmosphère isotherme

La pression locale $P(z)$ dont l'expression vient d'être établie et la densité moléculaire locale $n^\star(z)$ sont proportionnelles. En effet, la quantité de matière dans un volume élémentaire :

Ainsi, l'EEGP s'écrit :

en posant $n_0^\star = \dfrac{P_0}{k_\mathrm{B}T}$. Ce résultat montre que les molécules sont de moins en moins nombreuses lorsqu'on monte en altitude : l'air se raréfie. La distance caractéristique de variation (la hauteur d'échelle H) dépend de la masse des molécules et de la température.
D'autre part, l'argument de l'exponentielle dans la formule est le rapportde deux énergies :

- l'énergie potentielle de pesanteur de la molécule $E_p(z) = m^\star g z$;
- l'énergie d'agitation thermique $k_\mathrm{B}T$.

On peut alors écrire :

Interprétation : La répartition des molécules résulte de la compétition entre :

Cette formule peut être généralisée à tous systèmes thermodynamiques à l'équilibre.

V Forces de pression exercées par un fluide sur un solide

A) Calcul des forces de pression

Définition 3 : Expression de la force de pression

Pour calculer cette intégrale, il faut dans un premier temps **prendre en compte les symétrie du problème**. On appellera « problème » la paroi du solide et la distribution de la pression.

Propriété 2 : Plan de symétrie

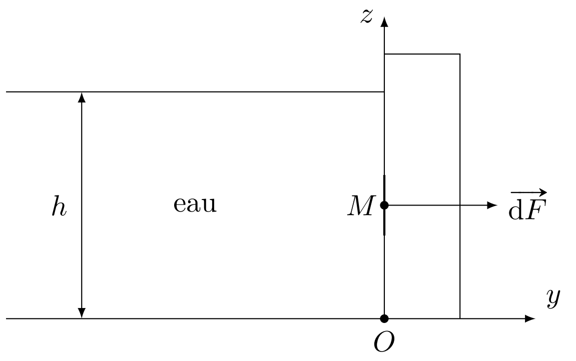
Le problème admet un plan de symétrie (P) si :

- la surface solide est symétrique par rapport au plan (P).
- la pression est la même en deux points M et M' symétriques par rapport au plan (P).

Propriété 3 : Axe de symétrie

Application : Force exercée sur un bassin

Dans un aquarium, un bassin pour nautiles est un pavé droit de longueur et de largeur égales à $\ell = 4\,\text{m}$ sur une profondeur de $H = 10\,\text{m}$, le tout en verre pour pouvoir admirer les céphalopodes. La force exercée sur une des parois latérales s'écrit :

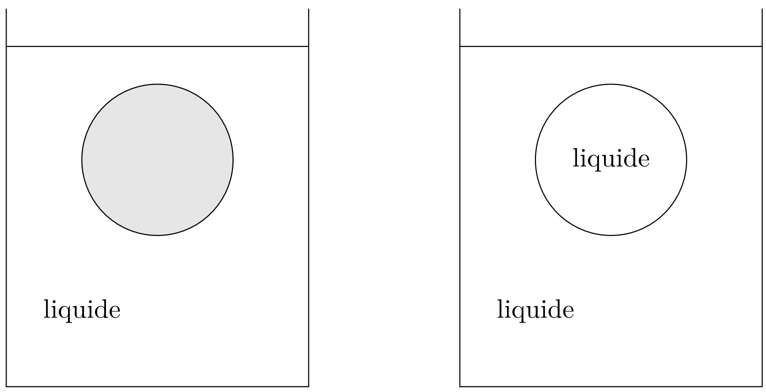


B) Poussée d'Archimède

On considère le cas où un solide est entièrement entouré par un fluide. La force de pression s'écrit dans ce cas :

Théorème d'Archimède

Soit un solide de forme quelconque, de volume V, de masse m, immergé dans un fluide au repos. On a vu précédemment que l'expression de la pression ne dépend que du champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. Dans les deux cas ci-dessous, le champ de pesanteur étant inchangé, le champ de pression est lui-même inchangé.



La force de pression exercée sur le volume V avec ou sans solide est donc le même. Appliquons un bilan des forces sur le volume V de liquide :

Propriété 4 : Poussée d'Archimède

Tou corps immergé au repos subit de la part du fluide une force opposée à celle du poids du volume de fluide déplacé.

Ainsi, un corps de masse m, en équilibre dans un fluide, subit deux forces :

Remarque

1. C'est la variation de pression avec l'altitude qui est à l'origine de la poussée d'Archimède car la pression est plus importante sous l'objet qu'au-dessus.
2. Un corps moins dense que le fluide dans lequel il est immergé flotte puisque son poids est inférieur à celui du fluide déplacé.
3. Si un objet est en équilibre entre deux fluides, comme il y a continuité de la pression à l'interface entre les deux fluides, le résultats obtenu pour la poussée d'Archimède se généralise. Il suffit dans ce cas d'ajouter les poussées d'Archimède dues aux deux fluides.

Application à l'iceberg

On souhaite calculer le volume émergé d'un iceberg, supposé homogène, de masse m. On appelle V_i le volume immergé, V_e le volume émergé, ρ_{eau} la masse volumique de l'eau liquide, ρ_{glace} la masse volumique de la glace.