Démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

si $\text{Var}(X)$ existe, alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

Démonstration :
Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\text{Var}(X)$ existe.
Alors X admet une espérance, on peut ainsi définir la variable aléatoire $Y = (X - E(X))^2$.

$\text{Var}(X)$ existe, donc $E\left(X - E(X)\right)^2$ existe, donc $E(Y)$ existe.

Donc d'après l'inégalité de Markov : $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $P(|Y| \geq a) \leq \dfrac{E(|Y|)}{a}$.

Soit ε un réel strictement positif, alors $a = \varepsilon^2 \in \mathbb{R}^{+*}$,

donc $P(|Y| \geq \varepsilon^2) \leq \dfrac{E(|Y|)}{\varepsilon^2}$.

Or $|Y| = Y = (X - E(X))^2$ et $|Y| \geq \varepsilon^2 \Leftrightarrow |X - E(X)| \geq \varepsilon$,

et $E(|Y|) = E(Y) = \text{Var}(X)$

donc $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

Fin de la démonstration