Convergence en loi :

Exercice 1 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère X_n une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{n}$.
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, suivant une loi certaine, égale à 0.
Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire X.

Exercice 2 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur Ω, mutuellement indépendantes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi uniforme sur [0,1]. On définit $Y_n = max(X_1, ..., X_n)$ puis $Z_n = n(1 - Y_n)$.
Soit Z une variable aléatoire définie sur Ω, suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
1. Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
2. Déterminer $Z_n(\Omega)$, puis la fonction de répartition de Z_n.
3. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.

Réciproque de la fonction de répartition :

Exercice 3 : Soit N_0 variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Remplir les tableaux suivants en utilisant votre calculatrice. Faire une représentation graphique de ce qui est calculé.

x un réel de $= [0, 1]$	0.05	0.3	0.5	0.7	0.95	0.975
$\approx F_{N_0}^{-1}(x)$						

un réel α de $]0, 1[$	0.05	0.1	0.01	0.3	0.2	0.5
un réel b tel que $P(-b \leq N_0 \leq b) \approx 1 - \alpha$						

Exercice 4 : une population de grenouilles de 5000 individus occupe une petite et charmante mare recouverte de feuilles de nénuphars, sur lesquelles les grenouilles apprécient se reposer. Une feuille ne peut accueillir qu'une grenouille à la fois, et à un instant donné, la probabilité pour une grenouille d'être sur une feuille est égale à 20%.
L'objectif de l'exercice est de répondre à la question suivante : De combien de feuilles de nénuphars doit disposer cette mare, pour que la probabilité que l'on vienne à en manquer soit inférieure à 0.025 ?
(a) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de grenouilles installées sur une feuille de nénuphar à un instant donné. Quelle est la loi de probabilité de X ? Son espérance, son écart-type ?
(b) Traduire l'objectif de l'exercice avec la variable X. Conclure.

Calculs de probabilité

Exercice 5 : Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
On définit pour tout $n \geq 1$: $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
L'objectif est de déterminer pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - 2p| > \varepsilon)$.

1. Montrer que les variables $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne sont pas indépendantes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que M_n admet une espérance et une variance, et donner leurs valeurs.
3. Rappeler la loi faible des grands nombres. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Conclusion ?

Exercice 6 : Le nombre de clients pénétrant dans un magasin un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 12. On suppose que les fréquentations correspondant à des jours différents suivent la même loi, et sont globalement indépendantes. Soit Z le nombre de clients qui sont passés au magasin sur 100 jours.
Que peut-on dire de $P(11 \leq \dfrac{Z}{100} \leq 13)$? Proposer 2 méthodes, l'une utilisant le théorème central limite, l'autre utilisant l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev.

Exercice 7 : un agriculteur cultive des poireaux de grande qualité. Toutefois il a en moyenne un poireau non consommable tous les 500 poireaux. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'il n'est pas plus de 5 poireaux non consommables dans son cageot de 200 poireaux. On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson après avoir justifié son utilisation.

Effectifs

Exercice 8 : Une urne contient une proportion p inconnue de boules blanches. On y effectue n tirages d'une boule avec remise et on compte le nombre de boules blanches obtenues. Soit Y_n égal au nombre de boules blanches divisé par le nombre de tirages.

1) Etudier l'image de l'intervalle [0,1] par la fonction $x \mapsto x(1-x)$.

2) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $P(|Y_n - p| \geq \epsilon) \leq \dfrac{1}{4n\epsilon^2}$.

3) En déduire une valeur suffisante de n pour que Y_n donne une valeur approchée de p à 0,01 près avec une probabilité de 95%.

4) Montrer en utilisant le théorème central limite que : $n \geq 196^2 p(1-p)$ convient, et que finalement $n = 9604$ convient.

Exercices supplémentaires : Reconnaître les situations !

Exercice 9 : 5000 personnes sont rassemblées dans une salle de concert. La probabilité qu'une personne quelconque achète un T-Shirt à l'effigie de Greeny la chanteuse est 0,4. De combien de T-Shirts doit-on disposer pour que la probabilité que l'on vienne à manquer soit inférieure à 0,1 ?

Exercice 10 : Une variété d'arbustes donne des fleurs blanches avec une probabilité 0,25, et des fleurs rouges avec une probabilité de à 0,75. On constitue par tirages successifs considérés comme indépendants un lot de taille n de ces arbustes ;

Déterminer n pour que la proportion des arbustes à fleurs blanches dans le lot soit comprise entre 0,20 et 0,30 avec une probabilité au moins égale à 95%.

Vous pouvez proposer deux méthodes : utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, ou utilisation du théorème de la limite centrée.

Exercice 11 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère X_n une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On définit $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Soit Y une variable aléatoire définie sur Ω, suivant une loi uniforme sur [0,1].

1. Déterminer $Y_n(\Omega)$.

2.Montrer que pour tout réel x, $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.